Auxiliar 7

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar:José Cereceda - Antonio Lizama
23 de octubre de 2013

Resumen.

Algunas distribuciones

- Normal $N(\mu, \sigma^2)$
  Sea $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene
  $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
- Gamma $G(r, \alpha)$
  Sean $r, \alpha > 0$. Si $X \sim G(r, \alpha)$, se tiene
  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r x^{r-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
  donde
  $$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad r > 0$$
- Chi cuadrado χ_k^2 Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $X \sim \chi_k^2$, se tiene
  $$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Problemas.

P1. Sea X v.a. con densidad $f_X(x) = Kx^{K-1},\ 0 < x < 1$.

a) Calcule $\mathbb{E}(X),\ Var(X)$.

b) Calcule $F_X(x)$.
Sea $Y = H(X) = F_X(X)$. Determine $f_Y(y)$.

c) Si K fuese una v.a. discreta con $\mathbb{P}(K = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k,\ k = 1, 2, ...$ (por lo tanto la densidad inicial es condicional), calcule $\mathbb{P}(X < a)\ \forall\ a$.

P2. Sea $X \sim exp(\alpha),\ ie,\ f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}\ x > 0$. Muestre que:

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)\ \forall t, s > 0$$

Si X representa el tiempo de duración de un equipo, interprete la igualdad.
Muestre el converso, i.e. si f satisface la igualdad y $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(X > h) - 1}{h} < \infty$, entonces sigue una distribución exponencial.

P3. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x/y}e^{-y} & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X|\ Y = y)$.
[Propuesto]: Calcule $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\ Y = y)\right)$

P4. Sea $X \sim G\,(r, \alpha)$

a) Muestre que $Y = 2\alpha X$ sigue una distribución χ^2_{2r}

b) Muestre que si $Z \sim N(0, 1)$ entonces $Y = Z^2 \sim \chi^2_1 = G\,(1, 1/2)$

Considere $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes con distribución $N(0, 1)$. Sea $T = \sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}$. Se sabe que T^2 sigue una distribución χ^2_n, encuentre la función de probabilidad de T.