

# AUXILIAR 9: ESTIMACIÓN

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA  
PROFESOR: FERNANDO LEMA  
AUXILIAR: JOSÉ CERECEDA - ANTONIO LIZAMA  
14 DE NOVIEMBRE DE 2013

## Problemas.

**P1.** Sea  $X_1, \dots, X_n$  una m.a.s. de una v.a.  $X$ , con  $\mathbb{E}(X) = \mu$ ,  $Var(X) = \sigma^2$ . Sea además  $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ .

a) Mostrar que  $\hat{\sigma}^2 = S^2$  es insesgado.

b) Mostrar que si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Considere sólo el caso  $n = 2$ .

**P2.** Suponga que  $T$ , el tiempo para fallar cierta componente, está distribuido exponencialmente, de parámetro  $\alpha$ , y considere  $\lambda = 1/\alpha$ . Se prueban  $n$  componentes, anotando el momento en que falla cada una,  $T_1, \dots, T_n$ . Se desea obtener una estimación insesgada del tiempo esperado en fallar ( $\lambda$ ). Para esto considere:

(i)  $\hat{\lambda}_1 = \bar{T}$ .

(ii)  $\hat{\lambda}_2 = n \cdot \min\{T_1, \dots, T_n\}$ .

Estudie ambos e indique cuál escogería.

**P3.** Sea  $\hat{\theta}$  estimador de cierto parámetro  $\theta$ . Muestre que si  $\hat{\theta}$  es insesgado o asintóticamente insesgado, esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ , entonces basta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$  para que el estimador  $\hat{\theta}$  sea consistente.

**P4.** Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a.s. de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Considere  $\hat{\mu} = \bar{X}$ , con  $\sigma^2$  conocido. Determine  $n$  t.q.

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) = \gamma = 1 - \alpha$$

**P5.** Se sabe que cierta proporción fija  $p$  de detonantes es defectuosa. De una gran partida, se eligen  $n$  al azar y se prueban.

a) Determine la función de verosimilitud para  $X$  v.a. que indica si un detonante es o no defectuoso.

b) Suponga que ahora desea calcular el parámetro  $\beta$  en una ley exponencial del tiempo de falla de los detonantes, al probar  $n$  detonantes llamamos  $T_1, \dots, T_n$  los tiempos de falla, utilizando lo anterior encuentre un parámetro de  $\beta$