Auxiliar 5

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar:José Cereceda - Antonio Lizama
23 de octubre de 2013

Resumen.

Teorema de Cambio de Variables bi-dimensional
Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sean $Z = H_1(X,Y)$, $W = H_2(X,Y)$ funciones tales que satisfacen:

(i) $z = H_1(x,y) \wedge w = H_2(x,y)$ tienen solución única para x, y en función de z, w. Esto es, $x = G_1(z,w),\ y = G_2(z,w)$

(ii) $\dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial z}, \dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial w}, \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial z}, \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial z}$ existen y son continuas.

Entonces,

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(G_1(z,w), G_2(z,w))|J(z,w)|$$

donde $J(z,w)$ corresponde al Jacobiano de la transformación, ie,

$$J(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Problemas.

P1. Sean X, Y variables aleatorias $Uniformes(0,1)$, independientes.

a) Calcule usando el T.C.V la densidad de la v.a. $Z = \dfrac{X}{Y}$.

b) Calcule sin la parte anterior $\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} < 2 \mid Y < 0{,}5\right)$.

P2. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$$

donde $k \in \{1, 2, ...\}$ y $p \in (0,1)$.

a) Encuentre la densidad de $X + Y$ en $\{1, 2, ...\}$.

b) Demuestre que $P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ con $k < n$.

P3. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes continuas con densidad $f_{X_i}(x) = f_X(x)\ \forall i$. Calcular la función densidad de las v.a. $Z_1 = \text{máx}\{X_1, ..., X_n\}$ y $Z_2 = \text{mín}\{X_1, ..., X_n\}$.

P4. Sea $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$. Si X e Y son independientes, demuestre que $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$. Recuerde que ($X \sim Poisson(\lambda) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{n!}$).

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-Y \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i)\mathbb{P}(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \lambda_1^{k-i}\frac{e^{-\lambda_1}}{(k-i)!}\lambda_2^{i}\frac{e^{-\lambda_2}}{i!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{i} \\
&= (\lambda_1+\lambda_2)\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \\
\therefore X+Y &\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)
\end{aligned}$$

P5. Ud. posee una barra de largo L, y le hace primero un corte X que sigue una v.a. $U(0,L)$ y hace un segundo corte Y tal que sigue una uniforme entre el intervalo (X,L), i.e. $Y|X \sim U(X,L)$, calcule $f_Y(y)$, sabiendo que $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)}$

P6. Sea $X \sim B(n,p)$. Calcule $\mathbb{E}(X)$:

- Por definición.
- Usando $X = \sum X_i, \quad X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

Solución:
Recordemos que $X \sim B(n,p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Luego,

- $$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k}(1-p)^{n-k-1}}_{1} \\
&= np
\end{aligned}$$

- Sabemos que si $X \sim B(n,p)$, entonces $X = \sum X_i$, donde las $X_i \sim Bernoulli(p)$, es decir, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p,\ \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.
  Luego, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$, pero todos los X_i tienen la misma distribución y por tanto la misma esperanza. Así, $\mathbb{E}(X) = n \cdot \mathbb{E}(X_1)$. Finalmente, vemos que $\mathbb{E}(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$, obteniendo $\mathbb{E}(X) = np$.