

AUXILIAR 6 ESPERANZA

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: ANTONIO LIZAMA & JOSÉ CERECEDA
21 DE OCTUBRE DE 2013

Resumen

Esperanza.

Sean X v.a, se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades.

- (1) La esperanza es lineal.
- (2) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- (3) Si X v.a. y $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

- (4) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Varianza. Si X e Y son variables, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) (= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2)$$

Propiedades.

- (1) Si $X = \alpha$, entonces $Var(X) = 0$.
- (2) $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$.
- (3) Si X e Y son independientes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Covarianza y Correlación. Sean X e Y dos variables aleatorias, se define covarianza y correlación respectivamente:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))) \quad \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

Esperanza Condicional. Sean X e Y dos variables aleatorias, se define la variables aleatoria (función de Y)

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i|Y = y) & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedad.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Problemas

P1. Muestre mediante un contraejemplo que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \not\Rightarrow X \perp Y$.

Solución:

Sea X una v.a. a valores en $\{-1, 0, 1\}$, tal que

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1/4 = \mathbb{P}(X = -1)$$

Ahora, consideremos la variable aleatoria $Y = 1 - |X|$.

Veamos que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Para esto, basta notar que $\mathbb{E}(X) = 0$, y $XY \equiv 0 \Rightarrow \mathbb{E}(XY) = 0$. Sin embargo, estas variables no son indep. pues

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

P2. Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) que toma valores uniformemente en la región triangular $R = \{(x, y) | 0 < x < y < 1\}$.

Calcule $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), Var(X), Var(Y), Cov(X, Y), \rho(X, Y)$. **Solución:**

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A} = 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \text{con } A \text{ el area triangular definido por } R$$

Luego, las densidades marginales son:

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y} dy = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y} dx = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Así; $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = 1/3$, $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = 1/6$, $\mathbb{E}(Y) = 2/3$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1/2$, $Var(X) = 1/18 = Var(Y)$.

Por otro lado, $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \frac{2}{3}\mathbb{E}(X) - \frac{1}{3}\mathbb{E}(Y) + \frac{2}{9}$, donde

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 xy f_{X,Y}(x, y) dy dx = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, $Cov(X, Y) = \frac{1}{36}$. Finalmente, $\rho(X, Y) = \frac{1}{2}$ (mirar fórmulas en el resumen).

P3. Sean

$$\begin{aligned} X_1 &\sim U(0, 1) \\ X_2|X_1 &\sim U(X_1, 1) \\ &\vdots \\ X_n|X_{n-1} &\sim U(X_{n-1}, 1) \end{aligned}$$

Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = 1$.

Solución:

Sabemos que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})) = \mathbb{E}\left(\frac{1 + X_{n-1}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}(X_{n-1})}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}(X_{n-2})}{2}\right)$$

Afirmación: $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$.

Dem:

- Caso base: $i = 1$.

$$\mathbb{E}(X_1) = 1/2 \quad \checkmark.$$

- Paso Inductivo: $n - 1 \Rightarrow n$

Como vimos antes, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}(X_{n-1})}{2}$, pero por H.I., $\mathbb{E}(X_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}$.

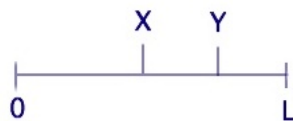
Luego,

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1$$

- P4.** Ud. posee una barra de largo L , y le hace un corte X de manera uniforme, y luego otro corte Y también de manera uniforme, entre X y L , como se muestra en la siguiente figura: Calcule la esperanza de la v.a. Y .



Solución:

Sabemos de la clase anterior que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\ln(L) - \ln(L-y)}{L} & 0 < y < L \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Ahora, si quisieramos calcular $\mathbb{E}(Y)$ por definición resulta muy matraquero, por lo que usamos la propiedad de la esperanza que dice $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$. Por enunciado tenemos que $Y|X \sim U(X, L)$, por lo tanto, $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{X+L}{2}$. Además $X \sim U(0, L)$, por lo que $\mathbb{E}(X) = L/2$. Por tanto,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(\frac{X+L}{2}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{2} + \frac{L}{2} = \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{3}{4}L$$

- P5.** Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda. Se denomina *run* a una secuencia maximal de caras consecutivas. Por ejemplo, la secuencia *scsccscscscscs* tiene 4 runs. Demuestre que el numero esperado de runs es $\frac{1}{2} + \frac{n-1}{4}$.

Hint: Defina las v.a. X_i : en la i -ésima posición comienza un run. **Solución:**
 Definamos las siguientes v.a.:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{en la } i\text{-ésima posición comienza un run} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego, se tiene X : cantidad de runs, se puede escribir:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Finalmente, por la linealidad de la esperanza,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$

Así, para encontrar la esperanza de X , basta con conocer la esperanza de cada X_i . Notemos además, que cada X_i sólo depende, de las posiciones i e $i-1$. Dicho esto, es claro que para todo $i \neq 1$, toda X_i tiene la misma esperanza. Esto se ve en lo siguiente:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(\text{primer lanzamiento sea cara}) = \frac{1}{2}$$

Por otro lado, para $i \neq 1$:

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(\text{lanzamiento } i-1 \text{ sea sello, lanzamiento } i \text{ sea cara}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

Luego,

$$\mathbb{E}(X_1) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1) + 0\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}, \text{ y } \mathbb{E}(X_i) = 1\mathbb{P}(X_i = 1) + 0\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{4}$$

- P6.** Suponga que el número de personas que entran a una tienda está dado por una variable aleatoria de media μ_1 . Suponga además, que el dinero gastado por cada persona son variables aleatorias independientes de media común μ_2 . Asuma también que la cantidad gastada por cliente es independiente al número de clientes que entra a la tienda. ¿Cuál es el valor esperado de dinero que ingresa a la tienda por día?.

Solución:

Sea N : número de personas que entra a la tienda ($\mathbb{E}(N) = \mu_1$), X_i : dinero gastado por la persona i , ($\mathbb{E}(X_i) = \mu_2 \forall i$).

Queremos calcular $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$, pero como el límite de la sumatoria es una variable aleatoria, a priori no sabemos como hacerlo. Usaremos pues, la propiedad de esperanza condicional, la que recordemos nos dice

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i | N\right)\right) \quad (1)$$

Pero,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i | N = n\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i | N = n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \quad \text{por indep.} \\ &= n\mathbb{E}(X_i)\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^N X_i | N) = N(\mathbb{E}(X_i))$. Finalmente

$$(1) = \mathbb{E}(N\mathbb{E}(X_i)) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(N) = \mu_1\mu_2$$

P7. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x/y}e^{-y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Demuestre que $\mathbb{E}(X|Y) = \begin{cases} y & 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$

Solución:

Para ello, calculemos primero la densidad marginal de Y :

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x/y}e^{-y} dx & 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} ye^{-y} & 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}\end{aligned}$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-x/y} & 0 < y < \infty, 0 < x < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{x}{y}e^{-x/y} dx & 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Pero notemos que $\frac{1}{y}e^{-x/y} = f_Z(x)$, con $Z \sim \exp(1/y)$, y $\int_0^{\infty} xf_Z(x) = \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1/y} = y$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \begin{cases} y & 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

P8. (*Método Probabilista*) Sea $G = (V, E)$ un grafo finito. Para cada conjunto W de vértices y cada arista $e \in E$, se define la siguiente función indicadora:

$$I_W(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ conecta } W \text{ y } W^c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $N(W) = \sum_{e \in E} I_W(e)$. Muestre que $\exists W \subseteq V$ tal que $N(W) \geq \frac{1}{2}|E|$. **Solución:**

Notemos que dado un $W \subseteq V$, $I_W : E \rightarrow \{0, 1\}$ es una v.a. *Bernoulli*(p) (por definición). Ahora, observar que el parámetro $p = 1/2$. Para esto, consideremos la siguiente manera de verlo. Supongamos que se pintan los nodos del grafo aleatoriamente de 2 colores, digamos negro y blanco. Luego del coloreo, llamamos a los nodos blancos W . De esta manera, dado un arco $e = uv \in E$, hay 4 posibles combinaciones de coloreo de los nodos u, v , BB , NN , NB , BN , de los cuáles 2 hacen que $I_W(e) = 1$, lo que justifica el valor de p . Luego, $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$ es una *Binomial*(n, p), por ser suma de $n(= |E|)$ *Bernoulli*(p).

Por tanto, $\mathbb{E}(N_W) = np = |E|/2 \Rightarrow \exists W$ tal que $N_W \geq \frac{1}{2}|E|$.