PROBLEMAS

- P1.** Se dice que una v.a. X tiene distribución de Pareto de parámetro X_0, α ($X_0 > 0, \alpha > 0$) si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

- Calcule $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$.
- Si $Y = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)$, determine la densidad de Y .
- Considere que X representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad de que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.
- Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10%, mientras que a aquellos que ganan más de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste. Determine la distribución de probabilidad de la v.a. monto de reajuste. Calcule además, su esperanza.

- P2.** Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución $exp(\lambda)$, es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) este bueno le asigna t_2 horas.

- Determine la distribución de Y : duración informada por el operario. Calcule además $\mathbb{E}(Y)$.
 - Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todos los equipos que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z : duración informada por el operario.
 - Si Y se distribuye como una exponencial de parámetro α , independiente de X , calcule $\mathbb{P}(Y > kX) \forall k$.
 - Determine la densidad de $Z = X + Y$.
- P3.** De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector aleatorio (X, Y) como X : N de monos obtenidos, Y : N de ases obtenidos.
- Determine la distribución de probabilidades de (X, Y) .
 - Determine las distribuciones marginales de X e Y . Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.
 - Determine la distribución condicional de X dado $Y = y, \forall y \in R_Y$ y la distribución condicional de Y dado $X = x, \forall x \in R_X$.
 - Determine la distribución de probabilidades de las variables $M = H(X, Y) = \text{Max}\{X, Y\}$; $N = G(X, Y) = \text{Min}\{X, Y\}$.

P4. Un plano está dividido en rectas paralelas separadas por una distancia L_1 una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 ($L_2 < L_1$), que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$.

P5. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I , queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

- Si P es un punto variable con X e I , suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2,4)$ e I uniforme en el intervalo $(10,20)$ (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H .
- Calcule $\mathbb{P}(H > 10 \mid X < 3)$.
- Calcule $\mathbb{E}(H \mid X = 3)$.

P6. Una fuente luminosa produce en un punto dado una iluminación L dada por:

$$L = \frac{I}{R^2}$$

donde I : intensidad luminosa de la fuente, y R : distancia del punto a la fuente. Suponga que I y R son v.a. independientes, y tales que $I \sim U(1,2)$ y $R \sim \exp(1)$.

- Calcule $\mathbb{P}(L > 1 \mid I > 1,5)$.
- Usando T.C.V. determine la densidad de L .
- Calcule la iluminación promedio de puntos ubicados a dos unidades de distancia.

P7. a) Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0.9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

- Al revisar un lote de 10 motores este es totalmente rechazado o vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos un es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75[UM] y se vende en 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor.

P8. La duración T (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro λ . La máquina tiene costos de funcionamiento de C_1 [UM] por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2 [UM] por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobre C_3 [UM] por hora y exige ser contratado por un número prefijado de horas (H). El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.

- Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
- Determine H de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
- Suponga que $\lambda = 0.01$, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$ (no es el óptimo de la parte 2). Determine la distribución de probabilidades de la v.v. U .

- P9.** Sea X v.a., y $H(X) = e^{tX}$, $t \in \mathbb{R}$ fijo. Se define la función generadora de momentos (f.g.m.) como

$$M_X(t) = \mathbb{E}(H(X)) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

- i.- Calcule $M_X(t)$, para $X \sim \text{Bin}(n, p)$, y $X \sim \text{exp}(\lambda)$
 ii.- Determine $\left. \frac{\partial^n M_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad \forall n$
 iii.- Sean X, Y v.a. indep, con f.g.m. $M_X(t)$, $M_Y(t)$ respectivamente, y sea $Z := X + Y$. Determine $M_Z(t)$ en función de $M_X(t)$ y $M_Y(t)$.

- P10.** a) Sea X v.a. discreta con $R_X = \mathbb{N}$. Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

- b) Sea X una v.a. continua con $R_X = \mathbb{R}^+$ y una función de distribución $F(\cdot)$. Muestre que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

- c) Sea X una v.a. cualquiera. Determine d que minimice:
 (i) $\mathbb{E}((X - d)^2)$, denominado error cuadrático medio.
 (ii) $\mathbb{E}(|X - d|)$, denominado error absoluto medio.

- P11.** a) Sea X e Y variables aleatorias independientes. Muestre que

$$\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y) + \text{Var}(X)\mathbb{E}(Y)^2 + \text{Var}(Y)\mathbb{E}(X)^2$$

- b) Paula y Pedro quieren cortar una pieza rectangular de un papel. Como ellos son probabilistas deciden determinar la forma exacta de su rectángulo usando la realización de una variable aleatoria positiva U . Pedro, como es flojo, considera una única realización de su v.a. y por lo tanto corta un cuadrado de lados igual al valor que tomó U . Paula, por su parte, consideró dos realizaciones independientes de U , una para el largo y otra para el ancho de su rectángulo. Calcule las esperanzas de las áreas de los rectángulos e indique cuál es mayor.
 c) En un juego usted gana un partido con probabilidad p . Cuando usted gana, su capital se duplica y cuando pierde se reduce a la mitad. Si comienza con C (UM de capital) y juega n partidos. Calcule la esperanza de la utilidad.

- P12.** a) Una variable aleatoria X se dice positiva si $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. y positivas. Pruebe que

$$\mathbb{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n} \right) = \frac{k}{n}$$

- b) Si X es una v.a. t.q. $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, muestre la desigualdad de Markov:

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t} \quad \forall t > 0$$

Obs: Suponga X continua.

c) Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x/y} e^{-y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X | Y = y)$.

P13. (a) Sea $X \sim \text{Geométrica}(p)$. Pruebe que $\mathbb{E}(X^{-1}) = -\frac{p \log p}{1-p}$.

Indicación: Recuerde que $\frac{a^i}{i} = \int_0^a x^{i-1} dx$.

(b) Sea X v.a. discreta con $R_X \subseteq \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades de X como $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$, es decir,

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

(i) Determine $\left. \frac{d^n G_X(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

(ii) Calcule $G_X(z)$ si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.