Auxiliar 5: V.A. BIDIMENSIONALES

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar:José Cereceda - Antonio Lizama
10 de octubre de 2013

Resumen.

Teorema de Cambio de Variables bi-dimensional
Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sean $Z = H_1(X, Y)$, $W = H_2(X, Y)$ funciones tales que satisfacen:

(i) $z = H_1(x, y) \wedge w = H_2(x, y)$ tienen solución única para x, y en función de z, w. Esto es, $x = G_1(z, w),\ y = G_2(z, w)$

(ii) $\dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial z}, \dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial w}, \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial z}, \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial z}$ existen y son continuas.

Entonces,

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(G_1(z, w), G_2(z, w))|J(z, w)|$$

donde $J(z, w)$ corresponde al Jacobiano de la transformación, ie,

$$J(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Problemas.

P1. Sean X, Y variables aleatorias $Uniformes(0, 1)$, independientes.

a) Calcule usando el T.C.V la densidad de la v.a. $Z = \dfrac{X}{Y}$.
sol **Solución:**
Como X e Y son independientes, entonces $f_{X,Y}(x, y) = 1$ en $(0, 1) \times (0, 1)$.
Nuevamente debemos definir una variable adicional. Tomemos $W = Y$. Despejando $X = ZW,\ Y = W$. Ademas $|J(z, w)| = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$ Luego,

$$f_{Z,W} = f_{X,Y}(zw, w)w = \begin{cases} w & 0 \leq zw \leq 1^{\star},\ 0 \leq w \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Ahora debemos integrar con respecto a w, pero vemos que tenemos 2 restricciones para eso: $0 \leq w \leq min(1, 1/z)$ por $\star$.
Por lo tanto

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^{1/z} w\ dw & z > 1 \\ \int_0^1 w\ dw & 0 < z < 1 \\ 0 & \sim \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2z^2} & z > 1 \\ \frac{1}{2} & 0 < z < 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

b) Calcule sin la parte anterior $\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} < 2 \mid Y < 0{,}5\right)$.

P2. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$$

donde $k \in \{1, 2, ...\}$ y $p \in (0, 1)$.

a) Encuentre la densidad de $X + Y$ en $\{1, 2, ...\}$.

b) Demuestre que $P(X = k|X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ con $k < n$.

P3. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes continuas con densidad $f_{X_i}(x) = f_X(x)\ \forall i$. Calcular la función densidad de las v.a. $Z_1 = \text{máx}\{X_1, ..., X_n\}$ y $Z_2 = \text{mín}\{X_1, ..., X_n\}$.

P4. Sea $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$. Si X e Y son independientes, demuestre que $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$. Recuerde que ($X \sim Poisson\,(\lambda) \Leftrightarrow \mathbb{P}\,(X = n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{n!}$).

P5. Ud. posee una barra de largo L, y le hace primero un corte X que sigue una v.a. $U(0, L)$ y hace un segundo corte Y tal que sigue una uniforme entre el intervalo (X, L), i.e. $Y|X \sim U(X, L)$, calcule $f_Y\,(y)$, sabiendo que $f_{Y|X}\,(y|x) = \dfrac{f_{Y,X}\,(y, x)}{f_X(x)}$

Solución:
Se tiene que $f_X\,(x) = \dfrac{1}{L}\mathbb{1}_{\{x\in[0,L]\}}$ y dada la definición de la v.a. $Y \sim U(X, L)$ $f_{Y|X}\,(y|x) = \dfrac{1}{L-x}\mathbb{1}_{\{y\in[x,L]\}}$, luego se tiene por la indicación que

$$f_{Y,X}\,(y, x) = f_{Y|X}\,(y|x)\, f_X\,(x)\, \mathbb{1}_{\{0<x<y<L\}}$$

Luego integrando la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
f_Y\,(y) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds f_{Y,X}\,(y, s) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{L-s}\mathbb{1}_{\{y\in[s,L]\}}\frac{1}{L}\mathbb{1}_{\{s\in[0,L]\}}\mathbb{1}_{\{0<s<y<L\}} \\
&= \int\limits_{0}^{y} ds \frac{1}{L-s}\frac{1}{L} \\
&= \frac{1}{L}\left(1 - \ln\left(L-x\right) - \ln\left(L\right)\right) \\
&= \frac{1}{L}\ln\left(\frac{L-y}{L}\right)
\end{aligned}$$

P6. Sea $X \sim B(n, p)$. Calcule $\mathbb{E}(X)$:

- Por definición.
- Usando $X = \sum X_i$, $\quad X_i = \left\{\begin{array}{ll} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{array}\right.$