Auxiliar 4

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: José Cereceda & Antonio Lizama
6 de octubre de 2013

Resumen

Función de Densidad. Sea X una variable aleatoria continua. Su función de densidad asociada, denotada f_X, es aquella tal que $F_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.
Teorema de Cambio de Variables: Sea X una variable aleatoria continua. Sea $\varphi : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable e inyectiva. Si $Y = \varphi(X)$ y la densidad de X es f_X, entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y))$$

Problemas

P1. Ud. posee una barra de largo L, y le hace 2 cortes X e Y de manera uniforme. Calcule la probabilidad de poder formar un triángulo con los 3 segmentos obtenidos.

Solución:
Sean a : segmento formado por el primer corte, y b: el segmento formado por el segundo. Luego, para formar un triángulo se debe tener:

$$\begin{aligned} a < b + (L - (a+b)) &\Leftrightarrow a < \frac{L}{2} \\ b < a + (L - (a+b)) &\Leftrightarrow b < \frac{L}{2} \\ L - (a+b) < a + b &\Leftrightarrow L < 2(a+b) \end{aligned}$$

Estas desigualdades nos dan la región de valores favorables de a y b.
Ahora bien, los valores posibles (casos totales) de a y b son:

$$\begin{aligned} a &< L \\ b &< L \\ a + b &< L \end{aligned}$$

Viendo la proporción entre región favorable sobre factible, vemos que la propiedad deseada es $\frac{1}{4}$ (graficar las regiones).

P2. Sea $\vec{x}$ un punto escogido de manera aleatoria en un círculo de radio 1. Encuentre la densidad de la v.a. R definida como la distancia desde el punto $\vec{x}$ al centro de círculo.

Solución:
Sea R la distancia del punto $\vec{x}$ al centro.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \leq r) &= \mathbb{P}(\sqrt{x^2 + y^2} \leq r) \\ &= \mathbb{P}(x^2 + y^2 \leq r^2) \end{aligned}$$

Esta última es la probabilidad de que el punto "caiga"(de caer) en un círculo de radio r, dentro de un círculo total de radio 1 (hacer dibujo). Luego, esta probabilidad de obtiene haciendo un cálculo de proporciones de áreas entre ambos círculos, por lo que:

$$F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi} \overset{\text{derivando}}{\overbrace{\Rightarrow}} f_R(r) = \begin{cases} 2r & 0 < r < 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Observación: Notar que sin esos límites no es densidad. ¿Porqué esos límites?

P3. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$$

donde $k \in \{1, 2, ...\}$ y $p \in (0, 1)$.

a) Encuentre la densidad de $X + Y$ en $\{1, 2, ...\}$.

Solución:
Primero es necesario definir el concepto de independencia de variables aleatorias. Diremos que dos variables aleatorias, X e Y, son independientes si los eventos $\{X = x\}$, $\{Y = y\}$ ($\leq$ en el caso continuo) lo son, es decir, $\mathbb{P}(X = x \wedge Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = k - Y \cap Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = k - i \cap Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = k - i)\mathbb{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p(1-p)^{k-i-1} p(1-p)^{i-1} \\ &= p^2(1-p)^{k-2}(k-1) \end{aligned}$$

b) Demuestre que $P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ con $k < n$.
Solución:

$$\begin{aligned} P(X = k | X + Y = n) &= \frac{P(X + Y = n | X = k)\mathbb{P}(X = k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(Y = n - k)\mathbb{P}(X = k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{p(1-p)^{n-k-1} p(1-p)^{k-1}}{p^2(1-p)^{n-2}(n-1)} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

P4. En una determinada población que tiene H hombres y M mujeres, se sabe que el peso de hombres y mujeres tiene una función de densidad f_H y f_M respectivamente.

a) Calcule la función de densidad del peso de toda la población (total entre hombres y mujeres).

Solución:
Sea X el peso de una persona de la población:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(X \leq x|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(X \leq x|M)\mathbb{P}(M) \\ &= F_H(x)\mathbb{P}(H) + F_M(x)\mathbb{P}(M) \qquad \text{derivando c/r a } x \\ f_X(x) &= f_H(x) \cdot \mathbb{P}(H) + f_M(x) \cdot \mathbb{P}(M)\end{aligned}$$

b) Si se toma un elemento de la muestra. Calcule $\mathbb{P}(\text{sea } H|X > x)$. ¿Qué sucede en el caso $\mathbb{P}(\text{sea } H|X = x)$? Aquí, $\mathbb{P}(H|X = x) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(H|x \leq X \leq x + \varepsilon)$

Solución:
Aquí se debe tener mucho cuidado con el término $\mathbb{P}(H|X = x)$. Recordar que cuando se definió la probabilidad condicional $\mathbb{P}(A|B)$ se hizo para los eventos B tales que $\mathbb{P}(B > 0)$. En este caso esto no se tiene ya que si X es v.a. continua, entonces $\mathbb{P}(X = x) = 0,\ \forall x$. Por esto es que define mediante el límite de más arriba. Sin embargo, en la práctica la pregunta tiene mucho sentido: dado que el peso de una persona cualquiera de la población es x (un valor fijo muestral), cuál es la probabilidad que el sujeto sea hombre?.
Dicho esto, resolvemos la pregunta.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H|X > x) &= \frac{\mathbb{P}(X > x|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ &= \frac{[1 - F_H(x)] \cdot \mathbb{P}(H)}{1 - F_X(x)}\end{aligned}$$

Todos los términos de la igualdad previa son conocidos $\left(\text{recordar que } \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)\right)$.
Finalmente,

$$\mathbb{P}(H|X = x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(H|x \leq X \leq x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H|x \leq X \leq x + \varepsilon) &= \frac{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \varepsilon|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \varepsilon)} \\ &= \frac{[F_H(x + \varepsilon) - F_H(x)] \cdot \mathbb{P}(H)}{F_X(x + \varepsilon) - F_x(x)} \qquad \Big/ \cdot \frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon} \text{ y tomando lím} \\ \mathbb{P}(H|X = x) &= \frac{f_H(x) \cdot \mathbb{P}(H)}{f_X(x)}\end{aligned}$$

P5. Un experimento consiste en disparar una partícula desde el origen del plano cartesiano en un ángulo α respecto al eje de las abscisas. Suponiendo que el ángulo de disparo es una variable aleatoria que distribuye $\alpha \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se define una nueva variable aleatoria Y como la altura a la cual la partícula cruza la recta de ecuación $x = 1$. Determine la función de densidad de Y.

Sol:
Usando la notación del T.C.V., tenemos $X = \alpha,\ f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sim \end{cases}$,

$Y = \varphi(X) = tg(X)$.
Notemos ahora que en la fórmula del teorema, f_X está evaluada en $\varphi^{-1}(y)$, que en este caso corresponde a $arctg(y)$. Luego, $f_X(arctg(y)) \neq 0 \Leftrightarrow arctg(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$.

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$