Auxiliar 3: Variables Aleatorias

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: Antonio Lizama - José Cereceda
26 de septiembre de 2013

Resumen

Variable Aleatoria. X se dice variable aleatoria, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$
X se dice discreta si su imagen es un conjunto numerable.
X se dice continuea si su imagen es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Función de Probabilidad. Sea X una variable aleatoria discreta. Su función de probabilidad asociada es:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k)$$

Problemas

P1. Suponga que un borrachito da un paso a la derecha con una probabilidad p, y a la izquierda con una probabilidad $1 - p$. Para modelar su movimiento supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en la posición $x = 0$. Encuentre la función de probabilidad luego de n saltos.

P2. Una urna contienen bolas enumeradas de 1 a n. Si m bolas son extraídas aleatoriamente y en secuencia, y cada vez es repuesta la bola seleccionada anteriormente.
Encuentre $\mathbb{P}(X = k),\ k = 1, ..., n$, donde X es el máximo de los m números extraídos.

P3. Sea X v.a. tal que $X \sim Binomial(n, p)$. Calcule $\mathbb{P}(X = k)$ cuando $n \longrightarrow \infty,\ p \longrightarrow 0$, y $np = \lambda$.

P4. **[Poisson Filtrada]** Sea X igual al número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un intervalo de tiempo de longitud t. Suponga que X tiene una distribución de *Possion* de parámetro αt. Se instala un instrumento para anotar el número de partículas emitidas. Suponga que hay una probabilidad constante p de que cualquier partícula emitida no sea contada. Si R es igual al número de partículas contadas durante el intervalo específico. ¿Cuál es la función de probabilidad de R?

P5. Sea $S = \{1, .., n\}$ y sean $A\,B$ dos subconjuntos escogidos de manera independiente (dentro de los 2^n subconjuntos que tiene S).

(a) Muestre que

$$\mathbb{P}\left(A \subset B\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Hint: Condicione con respecto a la cardinalidad de B.

(b) Muestre que $\mathbb{P}\left(A \cap B = \phi\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

P6. Sea $X \sim B(n, p),\ Y \sim BN(r, p)$, con la interpretación habitual de X e Y.
Complete, la igualdad

$$\mathbb{P}(X < \underset{\uparrow}{\bigcirc}) = \mathbb{P}(Y \underset{\uparrow}{\bigcirc} \underset{\uparrow}{\bigcirc})$$

(Se dice que Y sigue una binomial negativa cuando Y indica la cantidad de intentos necesarios para conseguir r exitos y cada uno de ellos con probabilidad p $Y \sim BN(r, p)$, notar que $Y = \{r, r+1, r+2, ...\}$ y además $\mathbb{P}\left(Y = k\right) = \binom{k-1}{k-r}(1-p)^{k-r}\,p^r$)