Auxiliar 2: Probabilidad condicional e independencia

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Antonio Lizama & José Cereceda
12 de septiembre de 2013

Resumen

Definición: Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades: A continuación, las más relevantes:

1. **Fórmula de Bayes:** Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. **Probabilidades Totales:** Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partición de Ω, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

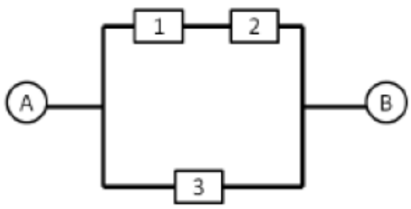
3. **Multiplicación de Probabilidades:** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}) = \mathbb{P}(A_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i|A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n)$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Problemas

P1. Considere que en el circuito de la figura las componentes 1, 2 y 3 tienen una probabilidad p de funcionar, es decir, $1 - p$ de fallar, y lo hacen de forma independientes.



a) Calcule la probabilidad de que exista flujo de A a B.

b) Calcule la probabilidad de que 1 esté bueno, sabiendo que hay flujo.

P2. Se realiza una secuencia infinita de eventos independientes. Cada una de ellas tiene probabilidad p de ser un exito y $(1-p)$ de fallar calcule la probabilidad de

a) Primero muestre que si A, B son independientes, entonces A^C, B^C también lo son.

b) Al menos un suceso sea exitoso en los primeros n intentos.

c) Ocurran exactamente k sucesos en los primeros n intentos.

d) Todos los resultados sean exitosos, y todos fallidos.

P3. Considere n urnas, cada una de ellas contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de la urna 1 a la urna 2 y *luego* se pasa una de la urna 2 a la urna 3, etc. Finalmente se escoge una esfera en la urna n. Si la primera esfera que se pasó era blanca, ¿Cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

[**Indicación:** sea $p_n = \mathbb{P}\,(n-\text{ésima esfera pasada sea blanca})$, y exprese p_n en función de p_{n-1}]

P4. *a*) Una prueba está compuesta por preguntas cada una con 5 alternativas. Un alumno sabe la respuesta de una pregunta (debido a que estudió la materia asociada) con probabilidad p. En tal caso, contesta correctamente. En caso contrario contesta al azar.

i.- Si un alumno contesta correctamente una pregunta. ¿ Cuál es la probabilidad que haya sabido la respuesta?

ii.- Un alumno, probadamente honesto, dice que estudió la mitad de la materia y contesta correctamente una pregunta. ¿Qué confianza se debe tener al resultado de dicha pregunta?

iii.- La prueba consta de 10 preguntas y otro alumno contesta todas de manera correcta. Calcula la probabilidad que haya sabido al menos una pregunta.

b) Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$, entonces para todo B se tiene que A y B son independientes. Concluya que el mismo resultado se tiene en el caso que $\mathbb{P}(A) = 0$.

P5. Un juego de video consta de n etapas de tal forma que para un jugador normal, la etapa $i-$ ésima es superada con probabilidad p_i si la anterior lo fué, y es superada con probabilidad $p_i/2$, si la anterior no lo fué. Considere que la primera etapa se supera con probabilidad α.

a) Plantee un diagrama o espacio muesral para $n = 3$. Calcule la probabilidad de superar la etapa 3.

b) Si un jugador pasa la etapa 3, ¿cuál es la probabilidad que haya pasado la etapa 1?