Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento Ingeniería Matemática
Semestre primavera 2013

MA2002:CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
PAUTA AUXILIAR # 7 - PRE CONTROL

6 de noviembre de 2013
Profesores María Clara Fittipaldi y Héctor Olivero Q.
Profesores Auxiliares: José Cereceda, Pablo Ugalde y Sebastian Reyes.

P1 Calcule la siguiente integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$$

donde $\gamma(t) = 2|\cos 2t|e^{it}\ 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución: Primero notar que $1 + z^2 = (1 + iz)(1 - iz) = -(i^2)(1 + iz)(1 - iz) = (z - i)(z + i)$ luego $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ tiene dos polos, en $z_1 = i, z_2 = -i$ ambos de orden 2. Por otro lado notar que $z_1, z_2 \notin \gamma$ y que $Ind_\gamma(z_1) = Ind_\gamma(z_2) = 1$, luego utilizando el teorema de los residuos, se tendrá que

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \left(Res\left(f, z_1\right) Ind_\gamma\left(z_1\right) + Res\left(f, z_2\right) Ind_\gamma\left(z_2\right)\right)$$

Luego $Res\left(f, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left((z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)$ y

$Res\left(f, -i\right) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left((z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)$

P2 Muestre que si f es holomorfa en $z \neq 0$ y $f(-z) = -f(z)$, entonces todos los terminos pares en su expansión de Laurent sobre $z = 0$ son iguales a cero.

Solución: Escribiendo f como su expansión de Laurente entorno a $z = 0$

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

con $a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz \quad k \geq 0$ y $a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint z^{k-1}f(z)dz \quad k \geq 1$
luego para $k \in \mathbb{N}$ par, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi i a_k &= \oint \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz \\ &= \oint -\frac{-f(z)}{z^{k+1}}dz \\ &= \oint \frac{f(-z)}{(-z)^{k+1}}dz \\ &= \oint \frac{f(u)}{(u)^{k+1}}(-du) \\ &= -2\pi i a_k \end{aligned}$$

de donde se concluye que $a_k = 0$ siempre que k sea par, para el caso en que $k < 0$ se tiene de manera analloga.

P3 *a)* Encuentre el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir $f(z) = \arctan(z)$

Solución: Hecho en clases.

b) calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie f en torno a $z = 0$.

Solución: Teniendo el conjunto Ω donde f es holomorfa, se tendrá que $f(z) = \dfrac{1}{2i}\{\log(1+iz) - \log(1-iz)\}$ por lo que

$$2if'(z) = \frac{i}{1+iz} + \frac{i}{1-iz}$$

luego sabemos que nuestro lado derecho de la ecuación anterior tiene desarrollo en serie de potencias, pero dependen de $|iz|$.

- Caso $|iz| = |z| < 1$
  tendremos que las fracciones anteriores las escribimos de la forma

$$\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz} = \sum_{k=0}^{\infty}(-iz)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(iz)^k$$

  analizando las sumas finitas e integrandolas

$$\begin{aligned}
\int_0^z \{\sum_{k=0}^{N}(-iz)^k + \sum_{k=0}^{N}(iz)^k\}dz &= \sum_{k=0}^{N}\int_0^z(-iz)^k dz + \sum_{k=0}^{N}\int_0^z(iz)^k dz \\
&= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-i)^k}{k+1}z^{k+1} + \sum_{k=0}^{N}\frac{i^k}{k+1}z^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\left\{\frac{(-i)^k}{k+1} + \frac{i^k}{k+1}\right\}z^{k+1}
\end{aligned}$$

  luego analizando el radio de convergencía de estas sumatoría, $R^{-1} = \limsup\limits_{k\to\infty} |\left\{\frac{(-i)^k}{k+1} + \frac{i^k}{k+1}\right\}|^{1/k} = \limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k+1}^{1/k} = 1$, luego las series convergen para $|z| < 1$ por lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned}
f(z) - f(0) &= \int_0^z f'(z)dz \\
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-i)^k}{k+1} + \frac{i^k}{k+1}\right\}z^{k+1}
\end{aligned}$$

- Caso $|iz| > 1$ propuesto
  Indicación: Notar que las fracciones se pueden escribir

$$\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz} = \frac{1}{iz}\frac{1}{\frac{1}{(iz)}+1} - \frac{1}{iz}\frac{1}{1-\frac{1}{iz}}$$

  por lo que tomando $w = \frac{1}{iz}$ se tiene que $|w| < 1$

P4 Encontrar la serie de Taylor o la serie de Laurente d la función $f(z) = 1/(1-z^2)$ en las regiones.

(i) $0 \leq z < 1$ (ii) $|z| > 1$ (iii) $0 \leq |z-1| < 2$