MA2002-4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Hector Ramirez C.
Auxiliares: Gustavo Estay, Felipe Salas

Auxiliar N° 11

P1 Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π-periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

1. Pruebe la identidad de Parseval:
$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$
2. Deduzca que:
$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$
3. Dadas las hipótesis anteriores, concluya la desigualdad de Wirtinger:
$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx.$$
4. Pruebe que en la parte anterior se tiene la igualdad si y solo si $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

P2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de periodo 2π tal que $f(x) = x^3$ para $x \in [-\pi, \pi)$.

1. Pruebe que la serie de Fourier de f tiene la forma de $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$ y escriba una fórmula integral para b_n.
2. Pruebe que la serie de Fourier converge para todo x.
3. Demuestre la siguiente identidad:
$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{6}.$$

P3 Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|s|}$ y encuentre la transformada de Fourier de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

P4 Considere la función:
$$\mathbb{1}_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases},$$

Calcule la transformada de Fourier de $\mathbb{1}_a$ y deduzca que:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(as)}{s^2} ds = a\pi.$$