MA2002-4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Hector Ramirez C.
Auxiliares: Gustavo Estay, Felipe Salas

Auxiliar N° 8

P1. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega,\ f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$

c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2, se define el Laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

Y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y solo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω

P2. Determine el dominio de convergencia de las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$.
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$

P3. Dado un entero k considere la función de Bessel de orden k:

$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}.$$

Pruebe que se cumple: $z^2 J_k''(z) + zJ_k'(z) + (z^2 - k^2)J_k(z) = 0$.