MA2002-4 Calculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Hector Ramírez C.
Auxiliar: Gustavo Estay - Felipe Salas

Auxiliar N° 4

P1. **(a)** Verifique que: $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$ es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar asociado.

(b) Considere ahora $\vec{G}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$.
Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, con $z = 0$, que parte desde el origen y llega al punto $(1,1,0)$ unida al segmento recto que une los puntos $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$.

P2. Evalúe la siguiente integral de linea: $\oint_C y^2dx + x^2dy$
Donde C es la curva que se obtiene al unir los puntos: $(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,0)$.

P3. **(a)** Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1. Demuestre que

$$\nabla \times \int_a^b \varphi(\vec{r},t)dt = \int_a^b \nabla \times \varphi(\vec{r},t)dt$$

(b) Considere un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ en coordenadas esféricas, donde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $div(\vec{F}) = 0$ y pruebe que

$$\nabla \times [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r})$$

(c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $div(\vec{F}) = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar que la fórmula anterior es válida en B (no lo haga).
Definamos el campo vectorial

$$G(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]dt$$

Usando lo anterior concluya que $\nabla \times G = F$ en B.