Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Clase Auxiliar N°2

Problema N°1. Suponga que $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$, cuya expresión es conocida en coordenadas esféricas. Es decir, para cada punto del espacio con coordenadas esféricas (r, φ, θ) escribimos:

$$\vec{F}(r,\theta,\varphi) = F_r(r,\theta,\varphi)\hat{r} + F_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{\theta} + F_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{\varphi} \ ,$$

en donde $F_r,\ F_\theta,\ F_\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son campos escalares diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^3$ el eje OZ.

(a) Demuestre que para todo $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$ se tiene que:

$$div(\vec{F})(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}(\theta)\,F_\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

(b) Demuestre que para todo $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$ se tiene que:

$$rot(\vec{F})(\vec{r}) = \frac{1}{r^2\,\text{sen}(\theta)}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\,\text{sen}(\theta)\,\hat{\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\,\text{sen}(\theta)\,F_\varphi \end{vmatrix}$$

(c) Suponga ahora que $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable y con *simetría esférica*. Deduzca que el campo $\vec{B}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{r^2}\hat{r} \qquad ,\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

¿Qué puede decir sobre el rotor del campo $\vec{B}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$?

Ejercicios propuestos:

(a) Obtenga la expresión del gradiente y laplaciano de un campo escalar lo suficientemente diferenciable, cuya descripción es conocida en coordenadas esféricas.

(b) Obtenga la expresión de los operadores diferenciales tradicionales (divergencia, rotor, laplaciano, etc.) de campos vectoriales y escalares que se conocen en coordenadas cilíndricas. En especial, estudie los campos vectoriales con *simetría cilíndrica*.

Problema N°2. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva obtenida al unir:
- el camino que une los puntos $(1,0,0)$ y $(1,0,2\pi)$ a través de la hélice parametrizada por la función:

$$\vec{\sigma}(\theta) := (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \theta) \quad, \forall \theta \in [0,2\pi].$$

- el segmento recto que va desde el punto $(1,0,2\pi)$ hacia el punto $(1,0,0)$.

Así definida, Γ es una curva cerrada y regular por pedazos. El objetivo de este problema es calcular la siguiente integral de línea:

$$W := \oint_{\Gamma} (y^2\cos(x) + z^3)dx + (2y\operatorname{sen}(x) - 4)dy + (3xz^2 + 2z)dz$$

Para ello, defina el campo vectorial $\vec{H}(x,y,z) := (y^2\cos(x) + z^3,\ 2y\operatorname{sen}(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, y considere la siguiente metodología:

(a) Verifique que el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{H}$ al recorrer la curva Γ es exactamente igual a W.

(b) Justifique brevemente por qué el campo vectorial $\vec{H}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$, y después encuentre un campo escalar $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, que sea de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$, y tal que:

$$\vec{H}(x,y,z) = -\nabla h(x,y,z) \quad, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Utilizando la regla de la cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo, determine el valor de W. Concluya que el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{H}$ al recorrer *cualquier* curva cerrada y regular por pedazos es igual a cero.

Problema N°3.

(a) Parametrice, en coordenadas cartesianas y esféricas, el hemisferio *inferior* de la esfera de radio $R > 0$ que está centrada en el origen del espacio.

(b) Parametrice, en coordenadas cilíndricas y esféricas, el *manto* del cono invertido de altura $H > 0$, radio $R > 0$, cuyo eje de simetría es el eje OZ.

(c) Parametrice, en coordenadas cilíndricas, la tapa *superior* del cilindro de radio $R > 0$, altura $H > 0$, cuya base se ubica en el plano $z = 0$ y cuyo eje de simetría es el eje OZ.