ALGEBRA LINEAL - CONTROL 3 (2013-2)

Pauta Problema 1

a) $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ simétrica, $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2$ y $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$

Construir A.

∴ A es simétrica y por lo tanto diagonalizable y se puede escribir como $A = PDP^t$ con $P = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A y D la matriz diagonal de los valores propios correspondientes.

Los vectores propios asociados a $\lambda = 3$ dados son $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

0.5 que normalizados son $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Para completar la base ortonormal, se sabe que v_3 es ortogonal a v_1 y v_2, es decir $v_3 = v_1 \times v_2$. Entonces

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

1.5 Así, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ además $P^{-1} = P^t$

Sigue que $A = PD\overset{P^t}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

1.0 $= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{6} & 0 \\ -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -6/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Determinar valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que C sea diagonalizable.

: C es diagonalizable si y solo si la multiplicidad algebraica de cada valor propio es igual a su multiplicidad geométrica.

Para determinar los valores propios $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ 0 & 2-\lambda & b \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$

1.0 de donde $\lambda = 2$ es el único valor propio y $m_{alg}(2) = 3$

Para determinar la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ determinamos la dimensión del espacio W_2.

Así $(C - 2I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.0 de donde $\begin{matrix} a x_2 = 0 \\ b x_3 = 0 \end{matrix}$ de modo que si $a \neq 0 \vee b \neq 0$

$\Rightarrow x_2 = 0 \vee x_3 = 0$ y en tales casos quedan dos o una variables libre y la dimensión de W_2 será 1 o 2, por lo tanto $\dim(W_2) \neq 3 = m_{alg}(2)$

1.0 En consecuencia, solo si $a = b = 0$, C es diagonalizable

Pauta Problema 2

a) Se probará que $T(X)$ es simétrica, es decir $[T(X)]^T = T(X)$

En efecto, $(T(X))^T = (BX + X^TB^T)^T = (BX)^T + (X^TB^T)^T$

$$= X^TB^T + (B^T)^T(X^T)^T = X^TB^T + BX = T(X)$$ (1.0)

b) Para la matriz representante de T con respecto a la base canónica en $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ y la base dada $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ calculamos la acción de T sobre la canónica en $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ donde $B = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$T\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a&c\\c&0\end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(1.0)

$$T\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&a\\a&2c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + 2c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b&d\\d&0\end{pmatrix} = 2b\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(1.0)

$$T\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&b\\b&2d\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + 2d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Entonces la matriz representante de T será

(1.0)

$$A = \begin{pmatrix}2a&0&2b&0\\c&a&d&b\\0&2c&0&2d\end{pmatrix}$$

c) Para $B = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $a=b=c=1$ y $d=0$ y con estos valores la matriz representante queda $A = \begin{pmatrix}2&0&2&0\\1&1&0&1\\0&2&0&0\end{pmatrix}$

Entonces para $Ker(T)$: $A\underline{X} = 0$ con $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ que en forma vectorial $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y escalonando, o directamente

$x_2 = 0$, $x_1 = -x_4$, $x_1 = -x_3$ de donde una base para $Ker(T)$ será, vectorialmente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y matricialmente

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{donde } \dim(Ker(T)) = 1 \longrightarrow 1.0$$

Además, por TNI $\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = 4$

Sigue que $\dim(Im(T)) = 3$ y como $Im(T) \subseteq S_2$

y $\dim(S_2) = 3 \Rightarrow Im(T) = S_2$

Por lo tanto, una base de $Im(T)$ puede ser la misma dada para S_2 : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. $\longrightarrow 1.0$

Pauta Problema 3

i) Se sabe que el polinomio característico de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i

$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \dots + (-1)^n\lambda^n$ en que $p(\lambda_i) = 0$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ valores propi

Así, según definición del enunciado

$p(D) = \alpha_0 I + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 + \dots + (-1)^n D^n$ donde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ y $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ $k = 2, \dots$

Entonces $p(D) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots + (-1)^n \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

10

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \dots + (-1)^n\lambda_1^n & & & 0 \\ & \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \dots + (-1)^n\lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \dots + (-1)^n\lambda_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\lambda_1)=0 & & & 0 \\ & p(\lambda_2)=0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p(\lambda_n)=0 \end{pmatrix} = 0$$

10

ii) $p(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k$ donde $A^0 = I \wedge A = PDP^{-1} \wedge A^k = PD^kP^{-1}$

10 Así $p(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \overbrace{(PDP^{-1})^k} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \overbrace{(PD^kP^{-1})} = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k D^k)P^{-1} =$

10 $= P\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k D^k\right)P^{-1} = P\underbrace{p(D)}_{=0 \text{ según (i)}}P^{-1} = P\,0\,P^{-1} = 0$

iii) Para $m \in \{0,1,\dots n-1\}$, A^m es claramente combinación lineal de $I, A, \dots$

Para $m = n$ se tiene, según (ii) $p(A) = 0 = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + (-1)^n A^n$

10 de donde $A^n = -\frac{\alpha_0}{(-1)^n} I - \frac{\alpha_1}{(-1)^n} A - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{(-1)^n} A^{n-1} \Rightarrow A^n$ es comb. Lineal de $I, A, A^2, \dots A^{n-1}$

Hipótesis: Sea A^m, $m \geq n$ combinación lineal de $I, A, \dots A^{n-1}$, es decir $\exists\, \gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $A^m = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \dots + \gamma_{n-1} A^{n-1}$

Entonces $A^{m+1} = A^m \cdot A = \gamma_0 A + \gamma_1 A^2 + \dots + \gamma_{n-1} A^n$ donde A^n es combinación lineal de $I, A, \dots A^{n-1}$ (ya demostrado) y por lo tanto A^{m+1}

10 es también combinación Lineal de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$