Control 1 - Algebra Lineal 13-2

Pauta Problema 1

a) Escribimos la matriz aumentada y escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & b & 1 & 1/2 \\ a & 2b & 2a & b \end{array}\right) \xrightarrow[3^a = 3(3^a) - a(1^a)]{2^a = 6(2^a) - (1^a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6b & 4 & 2 \\ 0 & 6b & 4a & 3b-a \end{array}\right) \xrightarrow{3^a = 3^a - 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6b & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4a-4 & 3b-a-\ldots \end{array}\right)$$

2.0

Sigue que i) Si $4a-4 \neq 0$, es decir $a \neq 1$ el sistema tiene solución ÚNICA

0.5

ii) Si $a=1$ y $3b-a-2=0$, es decir $b=1$ el sistema tiene infinitas soluc…

0.8

0.7 iii) Si $a=1$ y $b \neq 1$ el sistema no tiene solución.

b) (b1)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \multicolumn{4}{c|}{A} & \multicolumn{4}{c}{I} \\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&0&1&0 \\ 0&1&1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&-1&0&1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \\ \multicolumn{4}{c|}{I} & \multicolumn{4}{c}{A^{-1}} \end{array}\right) \quad \text{Sigue que } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix}$$

1.0

(b2) 1) B definida por $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ es invertible pues

0.5 es Triangular inferior y con diagonal tal que $\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \neq 0$. $(\prod_{i=1}^{n} b_{ii} = \ldots$

2) Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B Triangular inferior con 1s en diagonal o bien $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \ldots \\ 0 & \text{si} \ldots \end{cases}$

Así $(BC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}$. Si $i > j$ sólo interesa $k = j-1$, k…

$\Rightarrow b_{ij-1} c_{j-1j} + b_{ij} c_{jj} = 1(-1) + 1 \cdot 1 = 0$ y el resto son sumas cero

0.5 Si $i < j$, $b_{ik} c_{kj} = 0 \; \forall k = 1 \ldots n$. Sólo si $i = j$ $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} = b_{ii} c_{ii} = 1$

Así $BC = I \Rightarrow C = B^{-1}$

Pauta Problema 2

$F=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ y plano $\Pi: x+y=-2$

a) Para la recta por los puntos F y A se puede usar F como posición y $d=\overrightarrow{AF}=F-A$ como vector director.

Así $L_{FA}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ o bien $\begin{matrix}x=2+\lambda\\y=2+2\lambda\\z=2+2\lambda\end{matrix}$

Para $A'=L_{FA}\cap\Pi$ reemplazamos en $x+y=-2 \Rightarrow 2+\lambda+2+2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-2$

Así $A'=\begin{pmatrix}2-2\\2-4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 10

Análogamente para recta L_{FB}: $F+\lambda(F-B)=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow L_{FB}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ o bien $\begin{matrix}x=2+2\lambda\\y=2+\lambda\\z=2+2\lambda\end{matrix}$ y para $B'=L_{FB}\cap\Pi$

10 reemplazando en $x+y=-2 \Rightarrow 2+2\lambda+2+\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-2$, así, $B'=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

De igual forma, para L_{FC}: $F+\lambda(F-C)=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

o bien $\begin{matrix}x=2+2\lambda\\y=2+2\lambda\\z=2+\lambda\end{matrix}$ y para $C'=L_{FC}\cap\Pi$ reemplazamos en $x+y=-2$

$2+2\lambda+2+2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-3/2 \Rightarrow C'=\begin{pmatrix}2-3\\2-3\\2-3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1/2\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 10

b) Para la recta por A' y B' podemos usar A' como posición y $d=\overrightarrow{A'B'}=B'-A'$ como vector director: $L_{A'B'}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 10

c) Para encontrar el plano Π_1 que contiene a los puntos A, B y C podemos usar A como posición y $d_1=\overrightarrow{AB}=B-A \wedge d_2=\overrightarrow{AC}=C-A$ como vectores directores

25 así: $\Pi_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\mu\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix}x=1-\lambda-\mu\\y=\lambda\\z=\mu\end{matrix} \Rightarrow x+y+z=1$. Entonces las ecuaciones cartesianas de $L=\Pi\cap\Pi_1$

15 son $L: \begin{cases}x+y=-2\\x+y+z=1\end{cases}$ o bien $\begin{matrix}x=-2-y\\y=y\\z=3\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$

Pauta Problema 3

a) $C, D \in M_{nn}$, $C = CD \wedge D = DC$. Por dem. q' C y D son idempotentes

En efecto $C^2 = C \cdot C = (CD)(CD) = \underbrace{C(DC)D}_{\text{Asociat}} = (CD)D \underbrace{=}_{\text{def}} CD = C$ $\longrightarrow$ 1.0

Analogamente $D^2 = (DC)(DC) = D(CD)C \overset{\text{def}}{=} (DC)C = DC = D$ $\longrightarrow$ 1.0

b) Basta demostrar que $(A^{-1}+B)A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$. En efecto

$$(A^{-1}+B)A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = \underbrace{A^{-1}A}_{I}(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} + BA(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \quad \text{distributividad}$$

$$= (A+B^{-1})^{-1}B^{-1} + BA(A+B^{-1})^{-1}B^{-1}$$

1.0 $\longrightarrow$
$$= (I+BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \quad \text{distributividad}$$

$$= (I+BA)[B(A+B^{-1})]^{-1} \quad \text{Propiedad inversas}$$

1.0 $\longrightarrow$
$$= (I+BA)(BA+I)^{-1} = I$$

c) $P, Q \in M_{nn}$ con $P^2 = P \wedge Q = I - P$

∴ Demostrar que $Q^3 = Q$

Calculamos $Q^2 = Q \cdot Q = (I-P)(I-P) = I - 2IP + P^2 \overset{\text{def.}}{=} I - 2P + P$

$\Rightarrow Q^2 = I - P = Q$

Entonces $Q^3 = Q \cdot Q^2 = Q \cdot Q = Q^2 = Q$ $\longrightarrow$ 1.0

∴ Sea ahora P invertible, es decir existe P^{-1} tal que $P^{-1}P = I$

Entonces como $P^2 = P \Rightarrow P^{-1}P^2 = P^{-1}P \Rightarrow \underbrace{(P^{-1}P)}_{I}P = I$

$\Rightarrow IP = I \Rightarrow P = I$ //

además $Q = I - P = I - I \Rightarrow Q = 0$ // $\longrightarrow$ 1.0