Examen, MA11A Algebra
1 Diciembre, 2003

Problema 1:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Determine todos los valores de α tales que la ecuación corresponde a:

- circunferencia
- elipse
- recta o rectas
- parábola
- hipérbola
- conjunto vacío
- un punto

(6 ptos.)

Solución:

Estudiaremos en rpimer lugar la parte cuadrática de la ecaución, luego tenemos que

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veamos los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 - (\alpha - 1)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 2\alpha - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - (2\alpha - 1)),$$

y tenemos que los valores propios son

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2\alpha - 1,$$

y si $\alpha = 1$ estos dos valores coinciden, pero en este caso, la ecuación es

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

que corresponde a una circunferencia de centro $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y radio 1.

Veamos el caso $\alpha \neq 1$. Si $\lambda = 1$ entonces se tiene que $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si y sólo si es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} (\alpha - 1) & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & (\alpha - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x + y = 0$$

y por lo tanto un vector propio es

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y dado que el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2\alpha - 1$ es ortogonal a v_1, tenemos que

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz A la podemos escribir como

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y consideremos las nuevas variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

obteniendo la ecaución en la forma

$$u^2 + (2\alpha - 1)v^2 - 2u = 0 \Longleftrightarrow (u-1)^2 + (2\alpha - 1)v^2 = 1.$$

Así tenemos lo siguiente:

- $2\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow$ tenemos dos rectas $u = 0 \ \wedge u = 2$.
- $2\alpha - 1 > 0 \ \wedge \ \alpha \neq 1$ tenemos una elipse.
- $\alpha = 1$ se tiene una circunferencia
- $2\alpha - 1 < 0$ se tiene una hipérbola.

Problema 2:

(1) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

tal que $\|v\| = 1$ y considere la aplicación lineal T definida como

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longrightarrow & T(u) = u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces:

(a) Encuentre una base y la dimensión para Ker (T) e Im (T).

(2 ptos.)

(b) Encuentre la matriz A representante de T con respecto a la base canónica.

(0.5 ptos.)

(c) Estudie si la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

(1.5 ptos.)

(2) Sea U un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Sea $T : U \longrightarrow U$, una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T$ es inyectiva.

Pruebe que T es biyectiva, es decir, es un isomorfismo.

(2 ptos.)

Solución:

(1) Notemos que si $u//v$, entonces

$$u \times v = o$$

luego

$$\text{Ker } (T) = \{\alpha v / \alpha \in \mathbb{R}\} =< \{v\} >$$

y dim Ker $(T) = 1$

Además si $u \neq o$, entonces $u \times v \ 1v$, luego.

$$\text{Im } (T) = \{v\}^1 \text{ y } \ \dim \ \text{ Im } (T) = 2$$

así, una base de Im(T) es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v2 \end{pmatrix} \right\}$$

notemos que

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} \text{ y } T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

(2) Sea $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in$ Ker (T),luego

$$\begin{array}{ll} (1) & u_2v_3 - u_3v_2 = 0 \\ (2) & u_3v_1 - u_1v_3 = 0 \\ (3) & u_1v_2 - u_2v_1 = 0 \end{array}$$

así en (1) y (3)

$$u_1 = u_2\frac{v_1}{v_2}, u_3 = u_2\frac{v_3}{v_2}$$

luego en (2)

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_1/v_2 \\ u_2 \\ u_2v_3/v_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} v_1/v_2 \\ 1 \\ v_3/v_2 \end{pmatrix} = \frac{u_2}{v_2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{u_2}{v_2}\bar{v}$$

es decir, como $v_2 \neq 0$ y $u_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\text{Ker } (T) = \{\alpha v / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

y dim Ker $T = 1$

Veamos la imagen de T

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \text{ Im } T \text{ ssi el sistema}$$

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 &= w_1 \\ u_3v_1 - u_1v_3 &= w_2 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= w_3 \end{aligned}$$

tiene solución, así se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & v_3 & -v_2 & |w_1 \\ -v_3 & 0 & v_1 & |w_2 \\ v_2 & -v_1 & 0 & |w_3 \end{array} \right) v \left(\begin{array}{ccc|c} v_2 & -v_1 & 0 & w_3 \\ -v_3 & 0 & v_1 & w_2 \\ 0 & v_3 & -v_2 & w_1 \end{array} \right)$$

$$v \left(\begin{array}{ccc|l} v_2 & -v_1 & 0 & w_3 \\ 0 & -v_1v_3/v_2 & v_1 & w_2 + w_3v_3/v_2 \\ 0 & v_3 & -v_2 & w_1 \end{array} \right)$$

$$v \left(\begin{array}{ccc|l} v_2 & -v_1 & 0 & w_3 \\ 0 & -v_1v_3/v_2 & v_1 & w_2 + w_3v_3v_2 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 + w_2v_2/v_1 + w_3v_3/v_1 \end{array} \right)$$

así, el sistema tiene solución si y solo si

$$w_1 + w_2v_2/v_1 + w_3v_3/v_1 = 0$$

o equiv.

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 \cdot v_3 = 0$$

es decir $w \perp v$

y una base es

$$b = \left\{ \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix} \right\}$$

se tiene

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$A = M_{\beta_i \beta_i}(T) = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscaremos los valores propios de A

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & -\lambda & v_1 \\ v_2 & -v_1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & v_1 \\ -v_1 & -\lambda \end{vmatrix} - v_3 \begin{vmatrix} -v_3 & v_1 \\ v_2 & -\lambda \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} -v_3 & -\lambda \\ v_2 & -v_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + v_2^1\right) - v_3\left(\lambda v_3 - v_1 v_2\right) - v_2\left(v_1 v_3 + \lambda v_2\right)$$

$$= -\lambda^3 - \lambda v_1^2 - \lambda v_3^2 + v_1 \cancel{v_2} v_3 - v_2 \cancel{v_1} v_3 - \lambda v_2^2$$

$$= -\lambda^3 - \lambda(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \qquad (||v|| = 1)$$

$$= -\lambda^3 - \lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

así los valores propios son $\lambda = 0, \lambda = i$ y $\lambda = -i$ así la matriz no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

(3) Sean $x, y \in U$, luego si

$$T(x) = T(y) \Rightarrow T^2(x) = T^2(y)$$
$$= x = y$$

así T es inyectiva y como T es una transformación lineal de U en V, se concluye que T es biyectiva.

Problema 3:

(1) Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

(3 ptos.)

(2) Sean U y V dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\dim U \geq 1 \qquad \dim V \geq 1 \qquad U \oplus V = \mathbb{R}^n.$$

(a) Pruebe que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que

$$\text{Ker} \ \ A \ = U \qquad \text{y} \qquad \forall v \in V, \ Av = 2v.$$

(1 ptos.)

(b) Determine si A es diagonalizable y encuentre el polinomio característico de A.

(2 ptos.)

Solución:

(1) A es definida positiva si y sólo si

(a) $|a| = a > 0$

(b) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 > 0$

(c)
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a)$$
$$= a(a^2 - 1)$$
$$= a(a - 1)(a + 1) > 0$$

luego debemos tener que

$$a > 0$$
$$a^2 - 1 > 0$$
$$a(a + 1)(a - 1) > 0$$

luego $a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow |a| > 1$
y $a > 0$, por lo tanto

$$a \in (1, +\infty)$$

(2) Notemos que si definimos

$$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$$
$$x \longrightarrow P(x) = v$$

la proyección sobre V, entonces sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$$
$$x \longrightarrow T(x) = 2P(x)$$

entonces si $x \in U$

$$T(x) = 2P(x) = 0$$

y si $x \in V$, entonces

$$T(x) = 2P(x) = 2x$$

es decir

$$\text{Ker } (T) = U$$
$$\text{Im } (T) = V$$

y sea A la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas.

Por otra parte, $\forall u \in U$

$$Au = 0$$

y $\forall v \in V$,

$$Av = 2v$$

es decir 0 y 2 son valores propios de A, y como $\dim U + \dim V = 3$, entonces

$$\text{mult } (0) + \text{ mult } (2) = 3$$

y así A es diagonizable.

Además

$$\det\,(A_{\lambda} I) = -\lambda^{\dim U}(\lambda - 2)^{\dim V}$$