Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
21 de Noviembre, 2013

Auxiliar #11.2MA1102-6 Álgebra Lineal. : Auxiliar Extra

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base:

$$\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(en el espacio de partida y en el de llegada) sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la matriz N representante de T con respecto a la base canónica (en el espacio de partida y en el de llegada).

b) ¿Existen bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tales que la representante de T con respecto a $\mathcal{B}_1$ en la partida y $\mathcal{B}_2$ en la llegada sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

c) Pruebe que M no es diagonalizable y concluya que N tampoco lo es.

P2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión de números reales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u_0 = 1$, $u_1 = a$, $(\forall n \geq 2)$

$$u_n = au_{n-1} - u_{n-2}.$$

Sean $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\forall n \geq 1)$, $x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Demuestre que para todo $n \geq 0$ se tiene que $x_n = A^n x_0$ con $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Demuestre que si $|a| = 2$ entonces A no es diagonalizable.

c) Demuestre que si $|a| > 2$ entonces A es diagonalizable.

d) Asumamos que $|a| > 2$ y denotemos λ_1,λ_2 los valores propios de A. Demuestre que:

(i) $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $u_n = \frac{{\lambda_1}^{n+1} - {\lambda_2}^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.