.

Auxiliar 10: Semejanza y Diagonalización de Matrices

Resumen

- Dos matrices A, B son semejantes si existen matrices P, Q invertibles tal que $A = PBQ$. El teorema dice que A y B son semejantes si y sólo si tienen igual rango.
- Decimos que una A matriz está escrita en forma normal de Hermite si $A = PHQ$, con $H = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = r(A)$, y P y Q matrices invertibles.
- Sea T transformación lineal, decimos que $x \neq 0$ es vector propio de T, con valor propio asociado λ si $T(x) = \lambda x$.
- Diremos que una matriz A es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal D, es decir, existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$, lo que guarda directa relación con los valores y vectores propios de A.

P1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demuestre que A y B son semejantes.

b) Encuentre P y Q invertibles tal que $A = PBQ$.

P2. [P3 C3 2009-2]

a) Completar los elementos faltantes de la matriz $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ - & - \end{pmatrix}$, de modo que admita a $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vectores propios.

b) Encuentre una matriz $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ con los mismos vectores propios v_1 v_2 del punto $a)$ y valores propios $\lambda_1 = 1$ asociado a v_1 y $\lambda_2 = 0$ asociado a v_2. Calcule además B^{10}.

P3. Sea T la transformación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, que se sabe sus únicos valores propios son $\lambda = 3$ y $\lambda = -3$.

a) Encuentre una base β_1 de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\beta_1\beta_1}(T)$ sea diagonal.

b) Encuentre la matriz representante de T usando la base $\beta'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en la partida y en la llegada.

P4. [P3 C3 2009-2]

a) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene sólo un valor propio, entonces $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Demuestre que $A = 0$.