Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
24 de Octubre, 2013

Auxiliar #ExtraMA1102-6 Álgebra Lineal. : Control 2

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sea la siguiente T.L. $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, tal que:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix}$$

a) Calcule bases y dimensión de $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

b) ¿Es T un isomorfismo?

P2. Sean V, W e.v. sobre $\mathbb{R}$. Dada una transformación lineal $L : V \to W$, definimos su gráfico $G = \{(v, L(v)) \in V \times W : v \in V\}$. Con las siguientes operaciones sobre el e.v. $V \times W$:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2).$$

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Pruebe que G es un s.e.v de $V \times W$.

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

P3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $T : V \to V$ una T.L. tal que $T \circ T = T$. Demuestre que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

P4. Sea $[a, b)$ un intervalo contenido en el intervalo $[0, n)$ con $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $\mathit{1}_{[a,b)}(x)$ la función indicatriz de $[a, b)$:

$$\mathit{1}_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b) \\ 0, & x \notin [a, b) \end{cases}$$

Sea $\mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos el conjunto $F \subseteq \mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$ de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir,

$$f \in F \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathit{1}_{[i-1,i)}(x),\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, ...n.$$

a) Sea $[a, b)$ un intervalo con $a, b \in \mathbb{N}$ y $a < b < n$. Pruebe que $\mathit{1}_{[a,b)} \in F$.

b) Sea $t \in \mathbb{R}$ y $f \in F$. Pruebe que $tf \in F$.

c) Pruebe que F es un s.e.v. de $\mathcal{F}([0, n), \mathbb{R})$.

d) Pruebe que el conjunto de funciones $B = \left\{ \mathit{1}_{[0,1)}, \mathit{1}_{[1,2)}, ..., \mathit{1}_{[n-1,n)} \right\}$ es un conjunto l.i..

e) Encuentre una base de F.

f) Encuentre un isomorfismo (T) entre F y $\mathbb{R}^n$. Calcule $T(\mathit{1}_{[a,b)})$.