Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
26 de Septiembre, 2013

Auxiliar #5.3MA1102-6 Álgebra Lineal. : De todo un poco

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sean P y Q puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = \|x - Q\|\}$. Encuentre un punto que pertenezca a $\mathcal{A}$ y encuentre un vector normal al plano $\mathcal{A}$.

P2. Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset \mathbb{R}^n$ $(r < n)$ se dice ortogonal si $\forall i, j \leq r,\ i \neq j,\ < x_i, x_j >= 0$.
Sea $\{x_1, \ldots, x_r\}$ un conjunto ortogonal que cumple además $\|x_i\| = 1,\ \forall i$. Definimos:

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} < y, x_k > x_k,$$

con $y \in \mathbb{R}^n$.

a) Pruebe que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal.

b) Demuestre que si existe un conjunto de escalares $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{r} a_k x_k = 0$, entonces $a_i = 0,\ \forall i$.

P3. Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $M^t M$ es invertible. Definamos la matriz $P = I - M(M^t M)^{-1} M^t$. Pruebe que:

a) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = 0$.

b) La matriz $M^t M$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.

c) Pruebe que P no es invertible.

P4. Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - n & \text{si } i + j = n + 1 \\ 1 & \text{si } i + j \neq n + 1 \end{cases}.$$

Encuentre el conjunto de las soluciones del sistema $Ax = 0$.