Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
23 de Septiembre, 2013

# Auxiliar #5.1MA1102-6 Álgebra Lineal. : Geometría en $\mathbb{R}^3$, producto interno y descomposición LDU

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

**P1.** a) Sean $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Probar que $< Bx, y >=< x, B^t y >$.

b) Sea $A = I + B^t B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Probar que $< Ax, x >= \|x\|^2 + \|Bx\|^2$.

c) Concluir que si $Ax = 0$ entonces $x = 0$.

**P2.** Encuentre la descomposición $LDU$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

**P3.** Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Verifique que son puntos no colineales y encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano $\pi_1$ que los contiene.

**P4.** Dadas las rectas $L_1$ y $L_2$ definidas por

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Verifique que $L_1$ y $L_2$ son paralelas y distintas. Encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano $\pi_2$ que las contiene.

b) Encuentre la ecuación vectorial de la recta $L$ que se obtiene como la intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ ($L = \pi_1 \cap \pi_2$).

c) Encuentre el punto $S$ de intersección de las rectas $L_1$ y $L$ y verifique que $S$ satisface la ecuación cartesiana del plano $\pi_1$.

**P5.** Se definen las rectas:

$$L_1 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

a) Verifique que $L_1$ y $L_2$ no se intersectan.

b) Encuentre la ecuación normal del plano $\prod$ que contiene a la recta $L_1$ y es paralelo a $L_2$.

**def:** Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se define el producto punto como sigue:

$$< x, y >= x^t y = y^t x \in \mathbb{R}.$$

**def:** Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Se define la norma de la siguiente manera:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$