Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
2 de Septiembre, 2013

Auxiliar #3MA1102-6 Álgebra Lineal. : Matrices y Sistemas Lineales

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisface la siguiente condición:

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$.

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$A \text{ es invertible } \iff AA^t \text{ es invertible}$$

P3. Se tiene el siguiente Sistema de Ecuaciones Lineales:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (1) \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 5 & (2) \\ x & + & 2y & + & (a+2)z & = & b+5 & (3) \end{array}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de a y b el Sistema:

(i) No tiene solución.

(ii) Tiene infinitas soluciones. Determine el conjunto de soluciones.

(iii) Tiene solución única. Calcule dicha solución.

P4. Escriba el SEL de la P3 en forma matricial y calcule las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ b+5 \end{pmatrix}$$

Interprete sus resultados.

Propuesto: $U \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^tU = I$.

a) Sean U, V, W matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y encuentre su inversa. Además pruebe que VW es unitaria.

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^tu = 1$. Pruebe que $H = I - 2uu^t$ es unitaria.

c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que $\forall A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, $\exists \theta$ tal que $(G(\theta)A)_{21} = 0$.

d) Sea $U \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ triangular superior unitaria. Pruebe U es diagonal y determine los valores de $\mathbb{R}$ que pueden tomar las componentes en la diagonal de U.