Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
22 de Agosto, 2013

Auxiliar #1MA1102-6 Álgebra Lineal. : Matrices

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ muestre que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con λ algún numero real dependiendo de los parámetros.

P2. Muestre que $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no conmutan.

P3. Calcule

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P4. Sea $M \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{R})$ y $A, B \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{R})$. Con $n, r, m \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$M \cdot (A + B) = MA + MB$$

P5. Sea A una matriz cuadrada. Suponga que existe otra matriz B tal que:

$$A = AB = BA$$

$$A^6 - 5A^2 \neq B.$$

Demuestre que si A cumple la siguiente propiedad:

$$A^7 - 5A^3 = A,$$

entonces existe una matriz $X \neq 0$ tal que $AX = XA = 0$. Explicite X.

Definición: Una matriz P se dice que es idempotente si $P^2 = P$.

P6. Demuestre que si la matriz P es idempotente entonces $P^k = P, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

P7. Sean A y B matrices cuadradas tales que $A = AB$ y $B = BA$. Demuestre que A y B son idempotentes.

Notación: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ entonces se ve de la siguiente manera.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots & & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición: Si $A \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{R})$ entonces se define el producto de matrices como sigue:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$$

Donde $(c_{ji}) = C = AB \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.