Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería matemática
Cálculo Diferencial e Integral
Sección 6
Semestre Primavera 2013

Clase Auxiliar N°8: Teorema Fundamental del Cálculo

Profesor: Felipe Célèry
Auxiliar: Bruno Aguiló

P1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sean $g, h : [c, d] \to [a, b]$ dos funciones continuas en $[c, d]$ y derivables en (c, d). Sea $F(x) = \int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$, demuestra que

$$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x) \; \forall x \in (c, d)$$

Indicación: *Considera la función* $G(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ *y reescribe* F *en función de* G, h *y* g

P2. Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ dos funciones continuas. Además que sabe que g es derivable en $(0, 1)$ y satisface las relaciones

$$g(1) < 1, \quad \text{y} \quad 0 \geq g'(x) \geq 1, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Sea $F(x) = 2x - 1 - \int\limits_{0}^{g(x)} f(t)dt$, definida en $[0, 1]$. Para demostrar que F posee un único cero,

(a) Prueba que F es continua y que $F(0) < 0 < F(1)$. Concluye que F posee al menos un cero en [0,1].
Indicación: *Usa el hecho que* $f(x) \geq 1$ *y* $0 \geq g(1) < 1$ *para demostrar que* $\int_0^{g(1)} f(t)d(t) < 1$

(b) Prueba que F es derivable en $(0, 1)$ y que es estrictamente creciente. Deduce que el cero de F es único.

P3. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en su dominio, derivable en $(0, +\infty)$ y con $f(0) = 0$. Para $x \in [0, +\infty)$, sea $F(x) = x \int\limits_{0}^{x} f^2(t)dt$.

Demuestra que F es creciente y convexa.

P4. **(a)** Considera las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sin(x)$, y las constantes $a = 0$ y $b = \pi$. Encuentra el valor de ξ que verifica

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \quad (1)$$

(b) Sean f, g, funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestra que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, existe $\xi \in (a, b)$ que satisface la ecuación (1) de la parte (a).

Indicación: *Define* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *e integra por partes*