

## Clase Auxiliar N°2: Teorema del Valor Intermedio

Profesor: Felipe Célery  
Auxiliar: Bruno Aguiló

- P1.** Demuestra que la ecuación  $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$  tiene una solución en el intervalo  $[0, 1]$
- P2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función continua. Demuestra que  $f$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ , es decir,  $\exists \bar{x} \in [a, b]$  tal que  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .
- P3.** Sea  $f : [0, 2a] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(0) = f(2a)$ . Prueba que existen  $x, y \in [0, 2a]$ , con  $x - y = a$ , tales que  $f(x) = f(y)$ .
- P4.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq f(x)$ . Considera  $y_0 = f(0)$  y el intervalo  $\mathcal{I} = [-y_0, y_0]$ .
- (a) Demuestra que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{I}, f(x) > y_0$
  - (b) Concluye que  $f$  alcanza su mínimo en  $\mathbb{R}$  en un punto de  $\mathcal{I}$
- P5.** Un bus realiza un viaje de Rancagua a Santiago, recorriendo los 100 km que separan a ambas ciudades y tardando 1 hora en hacer todo el viaje. Demuestra que existe un tramo de 20 Km que es recorrido por el bus en exactamente 12 minutos.
- P6.** Demuestra que para todo  $n$  en los naturales, con  $n \geq 2$ , la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^n)}{x^n} + \sum_{k=1}^{n-1} x^k & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

es uniformemente continua en  $(0, 1]$ .