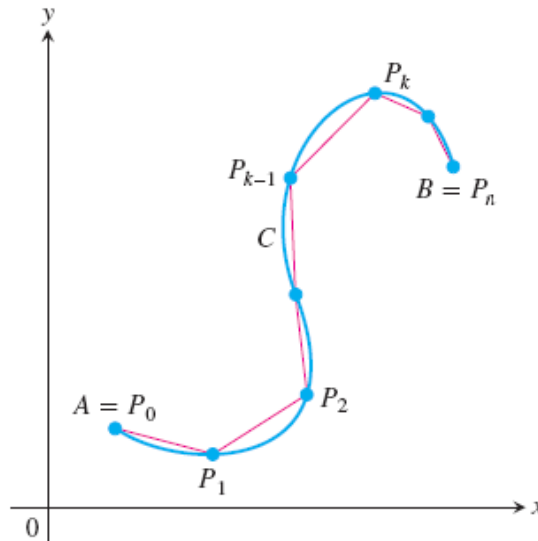




5. Longitud de una curva.

Sabemos lo que significa la longitud de un segmento recto. En particular, si tenemos dos puntos del plano $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, la longitud del segmento AB es, según el teorema de Pitágoras, $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$. Análogamente, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son puntos del espacio tridimensional, la longitud del segmento AB es, ahora, $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$. Sin embargo, no tenemos una noción precisa de la longitud de *segmentos curvilíneos*. Este es el objetivo de esta sección: *medir la longitud de un trozo de curva*.

Comenzaremos con el caso más simple, la gráfica de una función $y: x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow y = y(x) \in \mathbb{R}$ que es derivable y tiene derivada continua. Para calcular la longitud de la curva, aproximamos ésta mediante la longitud de una línea poligonal cuyos vértices son puntos de la curva C .



Veamos esto con un poco más de detalle. Tomemos una partición $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$. En la figura hemos representado la curva $y = y(x)$ y el segmento L_k de la poligonal correspondiente a los puntos $P_{k-1} := (x_{k-1}, y(x_{k-1}))$ y $P_k := (x_k, y(x_k))$. Una aproximación de la longitud total L de la curva $y = y(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es $L \approx \sum_{k=1}^n L_k$. Es más, cuando el diámetro de la partición disminuye a cero (y los puntos de la partición aumentan), la suma de las longitudes de estos segmentos se aproxima a la longitud total L . Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a la función $y = y(x)$ en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, existirá $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $y(x_k) - y(x_{k-1}) = y'(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y(x_k) - y(x_{k-1}))^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + y'(t_k)^2 (x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(1 + y'(t_k)^2)(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{1 + y'(t_k)^2} (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$



Entonces $\sum_{k=1}^n L_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + y'(t_k)^2} (x_k - x_{k-1})}_{\text{Suma de Riemann de la función } \sqrt{1 + y'(x)^2}} \rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. Este argumento justifica la fórmula

la para el cálculo de la longitud de una curva de la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Si C es la curva dada por la gráfica de una función $y: x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow y = y(x) \in \mathbb{R}$, que es derivable y tiene derivada continua, entonces la longitud de C está dada por la integral

$$\text{longitud}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

En general, no es fácil calcular una longitud de arco, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. Vamos a calcular ahora la longitud del trozo de la parábola $y = x^2$ correspondiente al intervalo $0 \leq x \leq 1$. Aplicando la fórmula de la longitud de una curva a la función $y(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ obtenemos que dicha longitud viene dada por la integral $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$. Esta integral

se puede calcular, con el cambio de variables $x = \frac{1}{2} \tan u$ pero el proceso que sigue es largo y complicado¹. Nosotros no seguiremos este camino que hemos esquematizado a pie de página sino que emplearemos otro cambio de variables en el que intervienen las funciones hiperbólicas.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\begin{array}{l} 2x = \sinh t, \quad dx = \frac{1}{2} \cosh t dt \\ x = 0, t = 0; \quad x = 1, 2 = \sinh t_0 \end{array} \right] = \int_0^{t_0} \cosh t \frac{1}{2} \cosh t dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \cosh^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \frac{1}{2} (1 + \cosh(2t)) dt = \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \sinh(2t) \right) \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{4} \left(t_0 + \frac{1}{2} \sinh(2t_0) \right). \end{aligned}$$

Vamos a calcular ahora los valores t_0 y $\sinh(2t_0)$. Comenzaremos por el segundo. Sabemos que

¹ NOTA. Para el cálculo de la integral $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$ se puede proceder de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} &= \left[\begin{array}{l} 2x = \tan u, \quad dx = \frac{du}{2 \cos^2 u} \\ x = 0, u = 0; \quad x = 1, \tan u_0 = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{u_0} \frac{du}{\cos^3 u} = \left[\begin{array}{l} t = \sin u, \quad dt = \cos u du \\ u = 0, t = 0; \quad u = u_0, t_0 = \sin u_0 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \frac{1}{8} \left(\log \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \Big|_0^{t_0} \\ &= \frac{1}{8} \left(4\sqrt{5} + \log \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} \right) \approx 1.47894. \end{aligned}$$

Para el cálculo de t_0 observemos que $t_0 = \sin u_0$ y como $\tan u_0 = 2$, tenemos que $\cos u_0 = \frac{1}{2} \sin u_0$. De la fórmula

$$\cos^2 u_0 + \sin^2 u_0 = 1 \text{ deducimos que } t_0 = \sin u_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



GRADO DE INGENIERÍA AEROESPACIAL. CURSO 2011–12.
MATEMÁTICAS II. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Lección 3. Curvas.



$\cosh^2 t_0 = 1 + \sinh^2 t_0 = 5$, luego $\cosh t_0 = \sqrt{5}$. Por otra parte, sabemos que se verifica

$$\sinh(2t_0) = 2 \sinh t_0 \cosh t_0 = 4\sqrt{5}.$$

Finalizamos calculando el valor t_0 . Para ello, como $2 = \sinh t_0$, obtenemos $\frac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) = 2$. Llamemos $z = e^{t_0}$. Entonces $z - \frac{1}{z} = 4$, luego $z^2 - 4z - 1 = 0$. Por tanto, $z = 2 \pm \sqrt{5}$. Puesto que $t_0 > 0$ y $t_0 = \log z$, tenemos que $t_0 = \log(2 + \sqrt{5})$. Con todo esto concluimos que la longitud del arco de la parábola vale $L = \frac{1}{4}(\log(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}) \approx 1.47894$.

Un argumento similar al descrito anteriormente permite definir la longitud de una curva parametrizada plana regular. Consideremos una curva plana regular C parametrizada por

$$C: t \in [a, b] \rightarrow C(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

y una partición $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$. Denotemos por L_k al segmento de la poligonal correspondiente a los puntos $P_{k-1} := (x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ y $P_k := (x(t_k), y(t_k))$. Ahora, como antes, aproximamos la longitud total L de la curva C por la suma $L \approx \sum_{k=1}^n L_k$. Es más, cuando el diámetro de la partición disminuye a cero (y los puntos de la partición aumentan), la suma de las longitudes de estos segmentos se aproxima a la longitud total L . Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ en cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, existirán puntos u_k y v_k en el intervalo (t_{k-1}, t_k) tales que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(u_k)(t_k - t_{k-1}) \quad \text{e} \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(v_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sqrt{x'(u_k)^2 (t_k - t_{k-1})^2 + y'(v_k)^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x'(u_k)^2 + y'(v_k)^2) (t_k - t_{k-1})^2} = \sqrt{x'(u_k)^2 + y'(v_k)^2} (t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Entonces $\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{x'(u_k)^2 + y'(v_k)^2} (t_k - t_{k-1})$. Aunque esta suma no es una suma de Riemann, puesto que en general $u_k \neq v_k$, se puede probar que, cuando la norma de la partición tiende a cero, la suma converge a la integral $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Este argumento justifica la fórmula para el cálculo de la longitud de una curva plana de la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Si C es una curva plana regular parametrizada por

$$C: t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$



entonces la longitud de C está dada por la integral

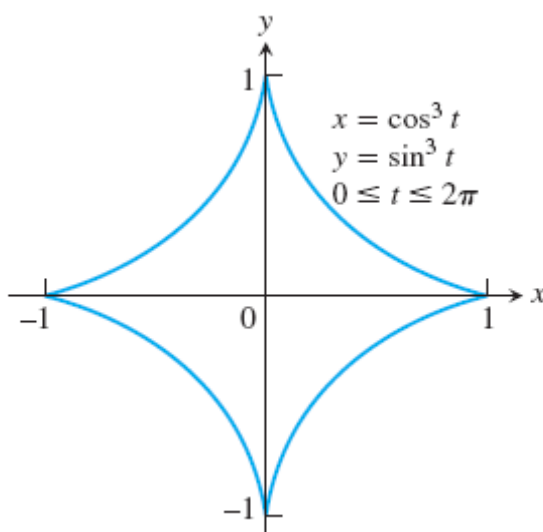
$$\text{longitud}(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

OBSERVACIÓN. Observa que $C'(t) = (x'(t), y'(t))$ y, por tanto, $\|C'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ es la norma (o longitud del vector tangente). Con esta notación, tenemos que $\text{longitud}(C) = \int_a^b \|C'(t)\| dt$.

EJEMPLO. Vamos a calcular la longitud de arco de la astroide, que es la curva de ecuación cartesiana $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. La astroide se puede parametrizar por las funciones

$$x = x(t) = \cos^3 t, \quad y = y(t) = \sin^3 t, \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi].$$

En la siguiente figura se muestra una representación de esta curva, que se obtiene estudiando la función $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, teniendo en consideración que esta curva es simétrica respecto del eje OY y respecto del eje OX .



Derivando en las ecuaciones paramétricas de la curva tenemos que $\begin{cases} x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \\ y'(t) = 3\sin^2 t \cos t, \end{cases}$ luego

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|.$$

Usando la simetría de la curva, podemos calcular sólo la longitud del primer cuadrante (y multiplicar por cuatro) con lo que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y $\cos t \sin t \geq 0$. Teniendo esto en cuenta obtenemos que la

$$\text{longitud total de la astroide es } L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \sin t dt = 12 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$



GRADO DE INGENIERÍA AEROESPACIAL. CURSO 2011–12.
MATEMÁTICAS II. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Lección 3. Curvas.



EJEMPLO. Para calcular la longitud de un arco de cicloide $x(t) = at - a \sin t$ e $y(t) = a - a \cos t$, obtenemos que $x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2 + a^2 \cos^2 t - 2a^2 \cos t + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t)$. Por tanto, tenemos que $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t}$ y

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a \left(-2 \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Como decíamos antes, no siempre es fácil calcular la longitud de una curva. Por ejemplo, intentemos calcular la longitud de un arco de elipse de semiejes $a, b > 0$, parametrizada por $C(t) = (a \cos t, b \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. El vector tangente es $C'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, luego $\|C'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Entonces tenemos que

$$\text{longitud}(C) = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

pero es conocido que esta integral no se puede calcular usando la regla de Barrow. Se trata de una *integral elíptica* y no es posible encontrar una primitiva de la función del integrando.

OBSERVACIÓN. Para una curva en polares, dada por la ecuación polar $r = r(\theta)$, con $\alpha \leq \theta \leq \beta$, y siendo $r = r(\theta)$ una función derivable con derivada continua, tenemos una parametrización dada por $C: \theta \in [\alpha, \beta] \rightarrow C(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ y, por tanto, $\|C'(\theta)\| = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$, con lo cual tenemos que $\text{longitud}(C) = \int_\alpha^\beta \|C'(\theta)\| d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$.

EJEMPLO. Calculemos la longitud de arco de la cardioide de ecuación $r = 1 - \cos \theta$. Según acabamos que comprobar, la longitud está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} \text{longitud}(C) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \left[\begin{array}{l} \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \end{array} \right] = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \left(-2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

EJEMPLO. Ahora calcularemos la longitud de la lemniscata $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. Usando la simetría de la curva y la fórmula de la longitud en coordenadas polares tenemos que $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$ y,



GRADO DE INGENIERÍA AEROESPACIAL. CURSO 2011–12.
MATEMÁTICAS II. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Lección 3. Curvas.



teniendo en cuenta que $\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, obtenemos que $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$. Esta integral impropia es convergente, pero no se puede calcular con la regla de Barrow. Sin embargo, sabemos que

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = [u = 2\theta] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Sabiendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y usando las aproximaciones $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ y $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1.22542$ obtenemos el valor aproximado de la longitud de arco de la lemniscata $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \approx 5.24412$.

En general, para una curva regular en $\mathbb{R}^3$, siguiendo un procedimiento similar al caso de curvas planas se define su longitud de la siguiente forma.

DEFINICIÓN. Si C es una curva regular en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$C: t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

entonces la longitud de C está dada por la integral

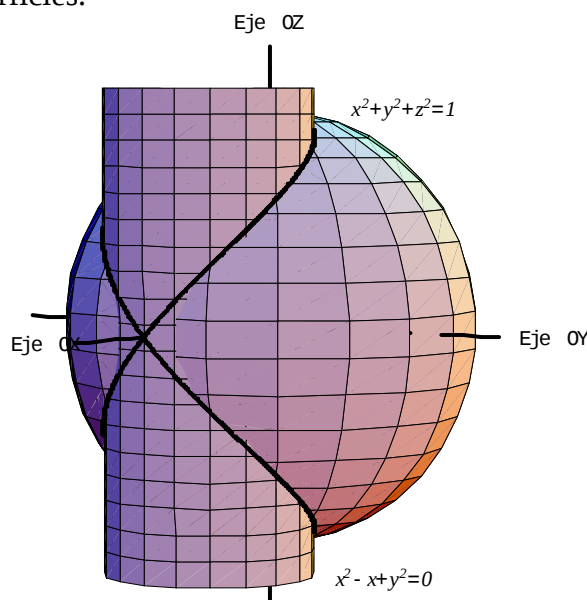
$$\text{longitud}(C) = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

EJEMPLO. Vamos a calcular la longitud de una espira de la hélice circular $C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$, $b \neq 0$. En este caso $C'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ y $\|C'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces, la longitud de una espira es $\text{longitud}(C) = \int_0^{2\pi} \|C'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$.

EJEMPLO. Vamos a calcular la longitud de arco de la curva dada por la intersección del cilindro $x^2 - x + y^2 = 0$ con la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En primer lugar vamos a tratar de visualizar la curva intersección del cilindro con la esfera. Comencemos con la esfera. Los puntos de la esfera son todos aquellos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Como la expresión $x^2 + y^2 + z^2$ describe analíticamente el cuadrado de la distancia (en $\mathbb{R}^3$) del punto $P = (x, y, z)$ al origen de coordenadas, los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ son todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuya distancia al origen es constante e igual a 1. Vamos a trabajar ahora con el cilindro $x^2 - x + y^2 = 0$. Esta superficie está formada por los puntos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican esta ecuación. Observemos que si un punto (x_0, y_0, z_0) pertenece al cilindro y, por tanto, verifica $x_0^2 - x_0 + y_0^2 = 0$, al variar la coordenada z y



considerar cualquier punto de la forma (x_0, y_0, z) , estos puntos también verifican la ecuación y, por tanto, también pertenecen al cilindro. En definitiva, esto nos dice que si el punto (x_0, y_0, z_0) pertenece al cilindro, entonces todos los puntos de la recta que pasa por este punto y es paralela al eje OZ también pertenecen al cilindro. Entonces, para visualizar esta superficie, basta describir con detalle, por ejemplo, los puntos del cilindro que están en el plano OXY , que son todos aquellos puntos $(x, y, 0)$ que verifican la ecuación $x^2 - x + y^2 = 0$. Esta ecuación se puede reescribir de la forma $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, vemos así que representa, en el plano $z = 0$, una circunferencia centrada en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. Estas consideraciones nos permiten visualizar la esfera y el cilindro de la forma tal como se muestra en la siguiente figura, donde hemos representado también la curva intersección de estas dos superficies.



Debido a la simetría de la curva, para calcular su longitud basta trabajar en el semiespacio superior. Veamos cómo es, con más detalle, la curva en este semiespacio y cómo podemos parametrizarla. Para parametrizar esta curva, recorrida por el punto $P = (x, y, z)$, basta parametrizar su proyección sobre el plano OXY , recorrida por el correspondiente punto $Q = (x, y, 0)$. La proyección de la curva sobre el plano OXY coincide con la del cilindro que, como sabemos, es la circunferencia de ecuación $x^2 - x + y^2 = 0$. Es fácil comprobar que su ecuación polar es $r(\theta) = \cos \theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces obtenemos la parametrización

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta = \cos^2 \theta, \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta), \end{cases} \quad \text{con } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Observemos que las coordenadas x e y del punto P son las mismas que las del punto Q . Y, puesto que el punto P está en la esfera, su coordenada z se puede obtener por la igualdad



GRADO DE INGENIERÍA AEROESPACIAL. CURSO 2011–12.
MATEMÁTICAS II. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Lección 3. Curvas.



$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta|.$$

De nuevo (y con objeto de evitar el valor absoluto) usamos la simetría y nos limitaremos a calcular la longitud de un cuarto de la curva, el que se obtiene cuando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. En este intervalo el seno es

positivo y $C(\theta) = \left(\cos^2 \theta, \frac{1}{2} \sin(2\theta), \sin \theta \right)$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, es una parametrización de un cuarto de la curva, concretamente el que se encuentra en el octante positivo. Como la derivada es

$$C'(\theta) = (-2 \cos \theta \sin \theta, \cos 2\theta, \cos \theta) = (-\sin 2\theta, \cos 2\theta, \cos \theta),$$

tenemos $\|C'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 \theta} = \sqrt{1 + \cos^2 \theta}$. Por tanto, la longitud de la curva está dada por $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta$. Esta integral es una *integral elíptica* y no puede ser calculada mediante la regla de Barrow. Sin embargo, con algún *método numérico* (que estudiarás en otro curso) se puede obtener una aproximación como la que mostramos a continuación

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta \approx 7.6404.$$

Es posible obtener otras parametrizaciones de esta curva. Por ejemplo, si usamos para la curva proyección la parametrización habitual de una circunferencia, centrada en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, es decir,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

obtenemos, sabiendo que $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, la siguiente parametrización de la curva

$$C(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t} \right), \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por otra parte, si usamos como parámetro la variable x , entonces podemos parametrizar la semicircunferencia superior de la proyección como $(x, \sqrt{x-x^2})$, con $0 \leq x \leq 1$, y usando de nuevo que

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ obtenemos la siguiente parametrización de un cuarto de la curva original

$$C(x) = \left(x, \sqrt{x-x^2}, \sqrt{1-x} \right), \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1.$$

No obstante, estas dos últimas parametrizaciones también conducen a integrales para las que no es posible obtener una primitiva y, por tanto, tampoco se pueden calcular mediante la regla de Barrow.

EJERCICIO 1. Calcula la longitud de las siguientes curvas dadas por sus ecuaciones polares:



GRADO DE INGENIERÍA AEROESPACIAL. CURSO 2011–12.
MATEMÁTICAS II. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA II
Lección 3. Curvas.



- a) $r = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ b) $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$ c) $r = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ d) $r = \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$
e) $r = \frac{6}{1 + \cos \theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ f) $r = \cos^3 \frac{\theta}{3}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ g) $r = \sqrt{1 + \sin(2\theta)}$, $0 \leq \theta \leq \sqrt{2}\pi$

Nota. Para calcular la integral del apartado e) puedes realizar el siguiente cambio de variables $u = \tan \frac{\theta}{2}$, con lo que $\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ y $d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$.

EJERCICIO 2. Calcula la longitud de los arcos de curva que se indican a continuación:

- a) $C(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t)$, $0 \leq t \leq \pi$. b) $C(t) = (2+t, -(t+1), t)$, $0 \leq t \leq 3$.
c) $C(t) = (0, \cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. d) $C(t) = (6t^3, -2t^3, -3t^3)$, $0 \leq t \leq 2$.
e) $C(t) = \left(t \cos t, t \sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq t \leq \pi$. f) $C(t) = \left(t, 0, \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq t \leq 8$.
g) $C(t) = (t \sin t + \cos t, t \cos t - \sin t, 0)$, $\sqrt{2} \leq t \leq 2$.

EJERCICIO 3. Determina el punto de la curva $C(t) = (5 \cos t, 5 \sin t, 12t)$ que se encuentra a 26π unidades del origen de coordenadas medidas a lo largo de la curva en el sentido de aumento de la longitud de arco.