Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 4, 2003

Derivadas

Índice

1. Problemas

[1] **Test de conocimiento básico.** Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando claramente su respuesta.

- La ecuación de la recta tangente en un punto $P = (a, f(a))$ a la curva $C = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ está dada por la ecuación $(y - f(a))f'(a) = (x - a)$.
- (a) $[f(x + x^2)]' = f'(x + x^2)(1 + 2x)$ (b) $[f(x + \ln(x))]' = f'(1 + \frac{1}{x})(x + \ln(x))$.
- Si $(f(x))^2 + x = 1$ entonces $f'(x) = \frac{-x}{2f(x)}$.
- Si $x = f(t)$ e $y = g(t)$ entonces $\frac{dy}{dx} = f'(t)g(t)$.
- (a) $(\log_a(x))' = \frac{1}{x}, a \neq e$. (b) $(a^x)' = a^x$.
- Si $f(x)$ no es continua entonces no es diferenciable.
- (a) Si $f(x) = x^n$ entonces $f^{(n)}(x) = n!$. (b) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f^{(n)} = \operatorname{sen}(x + \frac{n\pi}{2})$. (c) Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$ para $n \in \mathbb{N}$.
- El polinomio de Taylor de grado 2 de la función xe^x es $x + x^2 + \frac{x^3}{2}$.
- Si $f^{(n)}(a) > 0$, $f^{(i)}(a) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ entonces a es un mínimo global de f.
- Si $f^{(n)}(a) < 0$, $f^{(i)}(a) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ entonces a es un máximo de f.
- Si f es derivable y f' es creciente entonces f es convexa.
- Un punto de inflexión es un punto donde $f''(x) = 0$.
- Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de este, anulándose en los extremos, entonces dentro del intervalo existe al menos un punto, c, en el que la derivada se anula, ie, $f'(c) = 0$.
- Siendo $f(x)$ y $\phi(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en el mismo, y si además, $\phi(x)$ no se anula en su interior, entonces existirá un punto c dentro del intervalo tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)} = \frac{f'(c)}{\phi'(c)}$.
- Toda función derivable que se anula k veces tiene una derivada que se anula $k - 1$.
- Existen funciones dos veces derivables y cuya derivada es discontinua.

[2] Considere

$$f=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{I} \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}, \qquad g=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in\mathbb{I} \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

1. Muestre que f y g son discontinuas en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. Muestre que f y g son continuas en 0.
3. Muestre que f no es diferenciable en 0, en cambio, g es diferenciable en 0.

[3] Partiendo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y=x^3$ ii) $y=\frac{1}{x}$ iii) $y=\operatorname{sen}^2(x)$ iv) $y=x^4+3x^2-6$ v) $y=\frac{x+1^3}{\frac{3}{x^2}}$

[4] Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$ ii) $y=\frac{x^p}{x^m-a^m}$ iii) $y=(a+x)\sqrt{a-x}$ iv) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

v) $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ vi) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ vii) $y=(1+\sqrt{x})^3$

viii) $y=2\operatorname{sen}x+\cos 3x$ ix) $y=\tan(ax+b)$ x) $y=\cot^2 5x$ xi) $y=t\operatorname{sen}t+\cos t$

xii) $\operatorname{sen}^3 t$ xiii) $y=\frac{\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}}{x}$ xiv) $y=a(1-\cos^2\frac{x}{2})^2$ xv) $y=\ln(\cos x)$

xvi) $\ln(\operatorname{sen}^2 x)$ xvii) $y=\frac{\tan x-1}{secx}$ xviii) $y=\ln(\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}})$ xix) $y=\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}))$

xx) $y=\operatorname{sen}(\ln x)$ xxi) $y=\ln^3 x$ xxii) $y=\ln(\ln x)$ xxiii) $y=\ln(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x})$

xxiv) $y=e^{x^x}$ xxv) $y=x^{\ln x}$ xxvi) $y=x^{\operatorname{sen}x}$ xxvii) $y=\operatorname{sen}(\sqrt{1-2^x})$

[5] Calcular las derivadas de las siguientes funciones hallando previamente sus logaritmos.

i) $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$ ii) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$ iii) $y=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\operatorname{sen}x}$

iv) $y=\arctan(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}),(0\leq x<\pi)$ v) $y=\arctan\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ vi) $y=\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}x)$

vii) $y=\arccos(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$ viii) $y=\ln\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)+2\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ ix) $y=x^{\operatorname{arc\,sen}x}$

[6] Derivación de funciones implícitas, hallar y' si :

i) $y^2=4px$ ii) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ iii) $y^2-2xy+b^2=0$

iv) $x^3+y^3-3axy=0$ v) $y=\cos(x+y)$ vi) $y=\cos(xy)$

[7] Hallar $y'(x)$, para las funciones dadas paramétricamente:

i) $x=a\cos t, y=b\operatorname{sen}t$ ii) $x=a(t-\operatorname{sen}t), y=a(1-\cos t)$

iii) $x=2\ln(\cot(s)), y=\tan(s)+\cot(s)$

[8] Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son $x=v_0\cos(\alpha t), y=v_0\operatorname{sen}(\alpha t)-\frac{gt^2}{2}$, determinar la dirección del movimiento para los 5 primeros segundos, siendo $\alpha=60, v_0=50\frac{m}{s}$, bosquejar.

[9] Hallar $y^{(n)}$:

i) $y=a\cos ax$ ii) $y=a^x$ iii) $y=\ln(1+x)$ iv)$y=\operatorname{sen}x$

v) $y=\frac{1-x}{1+x}$ vi) $y=xe^x$ vii) $y=x^{n-1}\ln x$ viii) $y=\operatorname{sen}^2 x$.

[10] De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, S(r) = 4\pi r^2$, se deduce que $V'(r) = S(r)$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la relación análoga entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

[11] En el triángulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$. Sean b, c constantes, demostrar que $\frac{da}{dA} = h_a$, en que h_a es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interpretar el significado geométrico de este resultado.

[12] Estudiar las siguientes funciones:

i) $y = x\ln x$ ii) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$ iii) $y = |\operatorname{sen} 3x|$ iv) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

v) $y = x\arctan x$ vi) $y = x - 2\arctan x$ vii) $y = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$ viii) $y = \cos(\frac{x-|x|}{2}) - \frac{x+|x|}{2}$

ix) $y = \operatorname{sen}(\frac{x+|x|}{2}) - \frac{x-|x|}{2}$ x) $y = \frac{1}{2}(3x + |x|) + 1$

[13] Para cada una de las siguientes funciones, hallar máximo y mínimos.

1. (i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, sobre $[-1, \frac{1}{2}]$ (ii) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-2}$ sobre $[0, 4]$.
2. (i) $f(x) = e^{-x}(1 - x^2)$ sobre $[-1, 2]$ (ii) $f(x) = \cos(x^2) - \operatorname{sen}(x)$, sobre $[-\pi, \pi^2]$.

[14] Pruebe que las funciones $x^2 - \cos(x)$ y $2x^2 - x\operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$ tienen exactamente dos ceros.

[15] Demostrar que si f es una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces existe $x \in [0, 1]$ tal que $|f''(x)| \geq 4$.

[16]
1. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, hallar el de menor superficie.
2. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a, se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engrendado de esta manera?.

[17] Sea f tal que $f'(x) \geq M > 0$ para todos los valores en $[0, 1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el que $|f| \geq \frac{M}{4}$.

[18] Encuentre una función f para la cual existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pero no existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

[19] Demuestre que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ existen entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

[20] Calcule los siguientes límites utilizando apropiadamente la regla de l'Hôpital.

1. (i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{e^x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x) - 1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\tan(x)}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^h}$, $h > 0$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$
3. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{\tan(x)})$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\operatorname{sen}(x)} - (\operatorname{sen}(x))^x}{x^{\operatorname{senh}(x)} - (\operatorname{senh}(x))^x}$

[21] Encuentre los desarrollos de Taylor de las siguientes funciones:

1. (i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en torno a 0 (ii) $f(x) = \arctan(x - \log(x))$ en torno a 1
2. (i) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ en torno a 2 (ii) $f(x) = \cosh(1 + \operatorname{sen}(x))$ en torno a π
3. (i) $f(x) = \frac{1}{x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}$ en torno a 0 (ii) $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(x)}$ en torno a 0.

[22] Aplique la Fórmula del Resto de Lagrange para estimar las siguientes expresiones, con la precisión deseada.

1. (i) $e^{0,3}$ con 4 decimales (ii) $e^{-0,2}$ con cinco decimales

2. (i) $\ln(0{,}8)$ con cuatro decimales (ii) $\operatorname{sen}(0{,}5)$ con cuatro decimales
3. (i) $(65)^{\frac{1}{6}}$ con cinco decimales (ii) $(0{,}8)^{\frac{1}{5}}$ con cinco decimales

[23] Derivar las siguientes funciones:

1. $y = \operatorname{sen}(x^{\cos x}) + \cos(x^{\operatorname{sen} x})$
2. $y = \sqrt[n]{\frac{x - \tan x}{x + secx}}$
3. $y = \operatorname{arc\,sen}(\frac{3 \operatorname{sen} x}{4 + 5\cos x})$.

[24] Estudiar las funciones

1. (i) $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$ (ii) $x + \frac{(1+e^x)}{x}$
2. (i) $x\arctan(x) - x^2$ (ii) $x(\ln(x))^2$

2. Preguntas de Controles de años anteriores

[1] Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si} x = 1 \end{cases}$$

1. Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.
2. Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calculela $f'(x)$.
3. Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.
4. Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. Calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$.
5. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 para f en torno a 1.

[2] 1. Analice completamente $f(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ ([dominio, paridad, periodicidad], [recorrido asíntotas de todo tipo], [derivada, crecimiento, mínimos y máximos], [derivada segunda, concavidad, puntos de inflexión, gráfica])

2. Calcule el límite $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}\ln(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x})$.

[3] 1. Sean $0 < a < b$. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in]a,b[$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

2. Determine el mayor volumen de un cilindro de radio r y altura h, donde $P = (h,r)$ recorre la recta $L : ay + bx = ab$, $a, b > 0$ y $a + b = 1$. Analizar para que valor(es) de a este mayor volumen se maximiza.

[4] 1. Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

   a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.
   b) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe.

2. Considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2\frac{\arctan(x)}{x}}$ definida sobre $[-1,1] \setminus \{0\}$.

   a) Defina f en 0 de modo que resulte continua en dicho punto (no utilice la regla de l'Hôpital).
   b) Pruebe que la función resultante, definida en $[-1,1]$, es uniformemente continua.

[5] 1. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\,\mathrm{arc\,sen}(yx)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos(kg(x))$$

a) Muestre que f, f', f'', g, g', g'' satisfacen la relación

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0$$

b) Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$.

[6] Sea $b > 0$, $a \in]-b, b[$ y $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (b^2 - x^2)(a - x)$

1. Muestre que $\forall x \in [-b, b]$ y $\forall h \in [-b - x, b - x]$

$$f(x) - f(x + h) = -h(3x^2 - 2xa - b^2 + h^2 + 3xh - ah).$$

2. Muestre que f admite sólo un mínimo global y sólo un máximo global en $[-b, b]$ (no utilice segundas derivadas).

Ind: Puede proceder como sigue. Determine los candidatos a extremos y utilice la ecuación 1 para probar que efectivamente son extremos.

3. Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-b, b]$ es $\frac{4}{27}(\sqrt{a^2 + 3b^2})$ y calcule el valor de a que hace mínima esta diferencia.

[7] Considere la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x} e^{\frac{1}{x}}$. Para f

1. Encuentre dominio, ceros y asíntotas de todo tipo. Analice su continuidad, estudie los límites laterales en 0 y encuentre su recorrido.
2. Calcule f'. Estudie el crecimiento de f y encuentre los máximos y mínimos locales y globales (en el caso de existir).
3. Calcule f''. Estudie la convexidad de f y encuentre los puntos de inflexión.
4. Usando toda la información anterior grafique f.

[8] 1. Defina la función $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$ en cero para que sea continua en el intervalo $]-\pi, \pi[$.

2. Utilice un desarrollo de Taylor de orden dos para aproximar $\sqrt{3}$, con al menos dos decimales significativos ($\sqrt{3} = 1{,}7320...$).

3. Sea f continua en $[0, +\infty[$, derivable en $A =]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en A. Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A.

[9] 1. Para la función $\frac{x^3}{1-x^2}(e^x - e)$ encuentre: dominio, ceros, asíntotas de todo tipo y límites en 1 y -1.

2. Para la función $\cos(x)e^{-\frac{\cos(x)}{2}}$ encuentre mínimos y máximos.

[10] 1. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln(\frac{3}{4} + x^2 + y) = \operatorname{sen}(yx)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

2. Calcule el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\cosh(x)})$.

3. Sea f definida y continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre $]a,b[$, con $0 < a < b$. Suponga que $f(a) = f(b) = 0$. Mostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

[11] Suponga que $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que $f^{(n)}(x)$ es una función continua, con $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Sea $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$ con $f''(x) \neq 0$ salvo para x_0.

Se pide

1. Definir $g(x)$ de modo que sea continua en x_0
2. Calcular, de la definición de derivada, $g'(x_0)$.
   Ind: Sea $h = x - x_0$ y expanda en serie de Taylor f' y f'' en torno a x_0. Luego haga $h \to 0$.

[12] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

1. Encontrar los ceros, mínimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f.
2. Estudiar las asíntotas y bosquejar el gráfico de f.

[13] Estudiar completamente la función $f(x) = \frac{x}{\ln^2(x)}$ indicando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráfico.

[14] Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$ Se pide estudiarla completamente indicando:dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráfico.

[15] Dado $a > 0$, verificar que la función de variable real

$$f(x) = (a - \frac{1}{a} - x)(4 - 3x^2)$$

tiene exactamente un sólo máximo local y un sólo mínimo local y que la diferencia entre los valores alcanzados es

$$\frac{4}{9}(a + \frac{1}{a})^3$$

¿Cuál es el menor valor de esta diferencia para diferentes valores de a?.

[16] 1. Sea f derivable en x_0, calcular $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h}$, donde $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \leq a(x-y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

[17] Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función que verifica: (a) f es continua para todo $x \geq 0$. (b) f' existe para todo $x > 0$. (c) $f(0) = 0$. (d) f' es estrictamente creciente.

Sea $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Demuestre , aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$, que $f'(x) > g(x)$.

2. Deduzca que g es estrictamente creciente.

[18] Sean a, b números reales tales que $a < b$ y f una función real y continua en $[a, b]$. Suponga que f no se anula en el intervalo $[a, b]$ y que es diferenciable en $]a, b[$. Demostrar que existe $c \in]a, b[$ tal que : $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{f'(c)}{f(c)} \cdot e^{(a-b)}$. Indicación, considere la función $g = \ln |f|$, comente las propiedades de g en $[a, b]$.

[19] Determine un punto en que la curva $x^2 + y^2 = e^{2k \arctan \frac{y}{x}}$, k =constante, corta al semieje positivo OX y escriba las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.

[20] 1. Considere la función $f(x)$ definada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\pi x)}{x(x-1)} & \text{si } x \neq 0, 1, \frac{1}{2} \\ a & \text{si } x = 0 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y de b de modo que f sea continua en 0 y en 1. ¿Es posible definir f en $\frac{1}{2}$ para que sea continua en $[0, 1]$?.

2. Sea $[a, b]$, $a < b$ y $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, positiva y continuamente derivable en (a, b). Se definen las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente forma

$$g(x) = (x - a)(x - b)f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

y

$$h(x) = g'(x) + cg(x) \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}$$

Probar que h tiene al menos una raíz en (a, b).

[21] Estudie el gráfico de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, determinando:dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas y gráfico.

[22] 1. Considere las funciones siguientes definidas para todo $x > 0$: $f(x) = \sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$, $h(x) = 4c \arctan(\frac{1}{x}) - c \operatorname{sen}(cx) + d$. Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que f y g tienen la misma recta tangente en $x = 1$ y además que las rectas tangentes a f y h son perpendiculares en $x = 0$. Nota. Dado que h no está definido en $x = 0$ considere su límite cuando x tiende a 0^+.

2. Considere la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Demuestre que f verifica $(1 - t^2)f'(t) - tf(t) = 0$. Luego, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f^{(n)}(t) = P_n(t)(1 - t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$. Donde P_n es algún polinomio de grado n. Indicación, proceda por inducción.

[23] 1. Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a, b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que : $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$. Cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tales que : $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dot{<} t_n = b$. Demuestre que si f es derivable en $[a, b]$ y f' es acotada en $]a, b[$ entonces f es de variación acotada en $[a, b]$. Ind. Utilice el teorema del valor medio.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a, b]$ y tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $0 < a < b$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$. Ind. Utilice la función auxiliar $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

3. Pauta Control #4 MA12A Cálculo, Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable con f'' continua y $f(0)=0$. Se define la función

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\[2ex] f'(0) & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

(a) (2 ptos.) Demuestre que g es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que g' es continua en $\mathbb{R}$.

(ii) (2 ptos.) Considere la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\[2ex] 1 & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

Use **(i)** para demostrar que g tiene derivada continua en $\mathbb{R}$.

Pauta.- **(a)** (2 ptos.) Veamos primero que g es continua y derivable para $x\neq 0$. En efecto

- Si $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ es continua pues f es continua para $x\neq 0$. [**0.25pto**]
- Si $x\neq 0$, $g'(x)=\dfrac{xf'-f}{x^2}$ por álgebra ya que f' existe, luego g es derivable fuera del origen. [**0.25pto**]

Veamos ahora que g es continua y derivable para $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$, donde se usó que $f(0)=0$. Luego g es continua en $x=0$. [**0.5pto**]
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)/x-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=L_1$. En este punto y para analizar este límite L_1 hay por lo menos tres caminos posibles. Uno es utilizar la regla de l'Hôpital. Otro es utizar un desarrollo de Taylor de f. Otro es intentar directamente con el TVM. Veámoslos uno por uno:

Opción 1 Utilizando la regla de l'Hôpital en L_1 ya que numerador y denominador tienden a cero (recordar $f(0)=0$):

$$L_1=\lim_{x\to}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}.$$

Opción 2 Haciendo un desarrollo de Taylor de f de orden 2 en torno a $x=0$ (usamos que $f(0)=0$)

$$f(x)=xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_x),\quad \xi_x \text{ entre } 0 \text{ y } x.$$

Reemplazando en L_1 tenemos

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}f''(\xi_x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f''(\xi_x)$$

pero $0<|\xi_x|<x$, luego $\xi_x\to 0$ si $x\to 0$ y como f'' es continua $f''(\xi_x)\to f''(0)$ si $x\to 0$. De donde se obtiene $L_1=\dfrac{f''(0)}{2}$.

Opción 3 Usando el TVM y el hecho que $f(0) = 0$, sabemos que existe ξ_x entre 0 y x tal que $f(x)/x = f'(\xi_x)$. Reemplazando en L_1, tenemos

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f'(\xi_x) - f'(0)}{x}$$

a su vez, de nuevo por el TVM, existe un η_x entre 0 y ξ_x tal que $\frac{f'(\xi_x)-f'(0)}{\xi_x} = f''(\eta_x)$, de donde

$$L_1 = \lim_{x \to 0} f''(\eta_x) \frac{\xi_x}{x}.$$

Pero en general no es posible concluir que $\frac{\xi_x}{x} \to \frac{1}{2}$.

Con la tercera opción no se puede concluir, pero tiene un cierto puntaje [**hasta 0.75pto**]. Las otras dos opciones de análisis [**1pto**] permiten concluir que g es derivable en $x = 0$ y su derivada vale

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

(b) (2 ptos.) Veamos que la derivada de g

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf' - f}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{f''(0)}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$. [**0.25pto**] por considerar g' a partir del análisis de la parte anterior (aunque esté incorrectamente calculada).

Claramente lo es para $x \neq 0$ ya que es el cuociente de dos funciones continuas y la del denominador no se anula. [**0.25pto**].

Por otro lado, para $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = L_2.$$

De nuevo, para analizar este límite L_2 presentamos varias opciones:

Opción 1 Utilizando la regla de l'Hôpital en L_2 ya que numerador y denominador tienden a cero (recordar $f(0) = 0$):

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{xf''(x) + f'(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$$

pues f'' es continua.

Opción 2 Usando el mismo desarrollo de Taylor para f de la parte **(a)** (a este desarrollo se le asigna puntaje solamente en una de ambas partes) se obtiene reemplazando en L_2

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - xf'(0) - x^2/2 f''(\xi_x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{f''(\xi_x)}{2} \\ &= f''(0) - \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

Opción 3 Usando el TVM se encuentran dificultades similares a las ya vistas en la parte **(a)**. En caso de un buen análisis, se le asigna puntaje como en esa parte.

Las dos primeras opciones de análisis permiten concluir que g' es continua en $x = 0$ [**1.5pto**]. El alumno podría haber calculado erróneamente el valor de $g'(0)$ de la parte **(a)**. En consecuencia, el análisis anterior, en caso de estar correcto, lo habría llevado a concluir que g' no es continua en 0. Esto debe considerarse correcto. Si por el contrario, el alumno vuelve a cometer errores para forzar la continuidad de g, debe considerarse incorrecto.

(ii) (2 ptos.) Basta verificar las hipótesis de la parte **(i)** para $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ ([**0.2pto**] por identificar f) :

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o bien $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ [**0.2pto**]
- $f(0) = \operatorname{arctag}(0) = 0$ [**0.2pto**]
- $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ [**0.5pto**]
- $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, [**0.5pto**] luego f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ con derivada segunda continua en todo $\mathbb{R}$ (notar que $1 + x^2 \neq 0$). [**0.2pto**]
- $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ [**0.2pto**]

P2.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -xf(x), \qquad g'(x) = xg(x), \qquad f(0) = g(0) = 1.$$

(i) (1 pto.) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ind: puede utilizar resultados vistos en clases, enunciando claramente las hipótesis. Para la deducción del signo de f y g puede usar el TVI junto a una contradicción.

(ii) (1 pto.) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f.

(iii) (1 pto.) Calcule f'' en función de f (y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

(iv) (1 pto.) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un ξ entre 0 y x tal que $f(x) = -f''(\xi)$.

(v) (1 pto.) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

(vi) (1 pto.) Deduzca que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir del estudio anterior.

Pauta.- **(i)** Las funciones f y g son derivables (y por ende continuas) en todo $\mathbb{R}$. Lo mismo para el producto fg. [**0.1pto**]
Para probar que el producto es constante hay dos opciones al menos [**0.4pto**]

Opción 1 Tenemos

$$(fg)' = fg' + f'g = xfg - xfg = 0$$

en todo $\mathbb{R}$. Como la derivada del producto se anula sobre todo $\mathbb{R}$ (un intervalo) entonces (por un resultado visto en clases consecuencia del TVM) se tiene que

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x)g(x) = c.$$

Opción 2 También se puede hacer usando el TVM directamente, en efecto, sea $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado, entonces, aplicando el TVM a fg (que es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2)) se obtiene que existe un ξ entre x_1 y x_2 tal que

$$\frac{f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1)}{x_2 - x_1} = (fg)'(\xi) = 0,$$

de donde $f(x_1)g(x_1) = f(x_2)g(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cualesquiera, lo que significa que el producto es constante.

Ahora $f(0)g(0) = 1$ luego $fg = constante = 1$. [**0.1pto**]

Veamos ahora el signo de f y de g. Es claro que si f es positiva también lo es g y viceversa, pues el producto de ambas funciones vale 1. Claramente $f \neq 0$ pues el producto $fg = 1$. Supongamos entonces que $f(x_0) < 0$ para algún $x_0 \neq 0$. Como $f(0) = 1 > 0$ por el TVI existe x_1 con $f(x_1) = 0$ (f continua) lo que no puede ser. [**0.4pto**]

(ii)
- Crecimiento de f. $f'(x) = -xf(x)$. Como $f > 0$ entonces $f' > 0$ para $x < 0$ y $f' < 0$ para $x > 0$. Luego f es (est.) creciente para $x < 0$ y f es (est.) decreciente para $x < 0$. [**0.5pto**]
- Máximos y mínimos de f. Del crecimiento anterior, f tiene una máximo global en $x = 0$ ($f(0) = 1$). [**0.5pto**]

(iii)
- $f'' = (f')' = -xf' - f = (x^2 - 1)f$. [**0.2pto**]
- Concavidad y convexidad de f. De la expresión para f'' y como $f > 0$ vemos que $f'' > 0$ si $|x| > 1$ y $f'' < 0$ si $|x| < 1$. [**0.3pto**] Luego f es convexa en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava en el intervalo $(-1, 1)$. [**0.4pto**]. Puntos de inflexión: -1 y 1 [**0.1pto**]

(iv) Aplicando el TVM a f' entre 0 y x se obtiene que existe un ξ entre 0 y x tal que

$$f''(\xi) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = \frac{-xf(x)}{x} = -f(x).$$

[**1pto**]

(v)
- Crecimiento de f'. Como $(f')' = f''$ el crecimiento de f' viene del análisis del signo de la segunda derivada, que ya se hizo en **(iii)**. Se concluye que f' es (est.) creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y (est.) decreciente en $(-1, 1)$. [**0.3pto**]
- Acotamiento de f'. Como f' es continua, es acotada en todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ [**0.2pto**]. Podría ser no acotada si $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, sin embargo, como ya lo vimos en **(ii)**, $f' < 0$ cuando $x \to +\infty$ (creciente y acotada superiormente) y $f' > 0$ cuando $x \to -\infty$ (decreciente y acotada inferiormente). Luego f' es acotada en todo $\mathbb{R}$. [**0.5pto**]

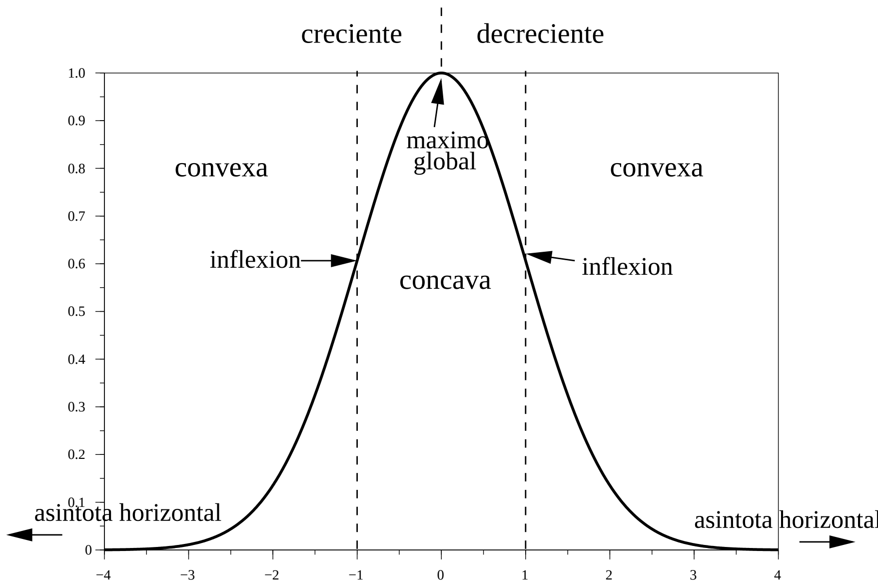
(vi)
- Límites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{f'(x)}{x} = 0$$

  por comparación ya que $f'(x)$ es acotada si $x \to +\infty$. [**0.25pto**]
  Del mismo modo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{f'(x)}{x} = 0$$

  por comparación ya que $f'(x)$ es acotada si $x \to -\infty$. [**0.25pto**]
- Gráfico de f. [**0.5pto**]



Pauta.-

P3.- **(i)** (3 ptos.) Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x = 0$, y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$, para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

(ii) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

(a) (2 ptos.) Considerando particiones uniformes (o equiespaceadas) del intervalo $[0, 1]$, calcule las sumas superiores e inferiores de f.

(b) (1 pto.) Enuncie la condición de Riemann y utilícela para probar que f es integrable en $[0, 1]$.

Pauta.- **(i)** (3 ptos.) Primero notar que $f(x) = \ln(\cos(x))$ está bien definida en $(-\pi/2, \pi/2)$. Además f es infinitamente derivable en ese intervalo.

Recordar que el polinomio de Taylor de orden 3 de f en torno a $x = 0$ es

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3.$$

[**0.4pto**]

Calculemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x)) = -\tan(x) \\ f''(x) &= -\sec^2(x) \\ f'''(x) &= -2\sec(x)(\sec(x)\tan(x)) = -2\sec^2(x)\tan(x) \end{aligned}$$

([**0.4pto**] cada derivada).

De lo anterior: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$ y entonces

$$P_3(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

[**0.2pto**].
Del Teorema de Taylor:

$$f(x) = P_3(x) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) x^4$$

donde ξ está entre 0 y x. [**0.4pto**]
Calculemos

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= (-2\sec^2(x)\tan(x))' \\ &= -4\sec(x)\tan(x)(\sec(x)\tan(x)) - 2\sec^2(x)\sec^2(x) \\ &= -4\sec^2(x)\tan^2(x) - 2\sec^4(x) \\ &= -2\sec^2(x)(2\tan^2(x) + \sec^2(x)). \end{aligned}$$

[**0.4pto**]
Si $x \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\xi \in (-\pi/4, \pi/4)$ y luego

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq 2 \cdot 2\,(2+2) = 16$$

ya que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in (-\pi/4, \pi/4)} |\sec(\xi)| &= \sqrt{2} \\ \sup_{\xi \in (-\pi/4, \pi/4)} |\tan(\xi)| &= 1. \end{aligned}$$

Así, el resto se puede acotar por

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)|x^4 \leq \frac{16}{24}|x|^4 = \frac{2}{3}|x^4|.$$

[**0.4pto**]
(a) (2 ptos.) Denotemos por P_n la partición uniforme de $[0,1]$ con n intervalos, o sea

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\}.$$

- Cálculo de $s(f, P_n)$ (suma inferior). En los intervalos $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ con $1 \leq i \leq n-1$ se tiene que $f(x) = x$ y luego [**0.3pto**]

$$\inf_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f = \frac{i-1}{n} \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Por otro lado, si $n \geq 2$,

$$\inf_{[\frac{n-1}{n}, 1]} f = 0$$

ya que $f(x) \geq 0$ para $x \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ y $f(1) = 0$. [**0.4pto**]
Entonces (notar que la primera suma tiene índice superior $n-1$)

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \;+\; 0 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2n} + \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

[**0.3pto**]

◇ Cálculo de $S(f,P_n)$ (suma superior). En los intervalos $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ con $1 \le i \le n-1$ se tiene que $f(x)=x$ y luego **[0.3pto]**

$$\sup_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} f = \frac{i}{n} \quad , \quad 1 \le i \le n-1.$$

Por otro lado, si $n \ge 2$,

$$\sup_{[\frac{n-1}{n},1]} f = 1$$

ya que $f(x) \le 1$ para $x \in [\frac{n-1}{n},1]$ y $f(x) \to 1$ si $x \to 1$. **[0.4pto]**
Entonces (notar que la primera suma tiene índice superior $n-1$)

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} \ + \ 1\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i \ + \ \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

[0.3pto]

(b) (1 pto.) La condición de Riemann expresa que una función (acotada) f es integrable en el sentido de Riemann ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}_{[0,1]} \text{ tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

donde $\mathcal{P}_{[0,1]}$ es el conjunto de todas las particiones de $[0,1]$ (todas, las uniformes y las no uniformes). **[0.4pto]**
Calculemos

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) - s(f,P_n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2n} + \frac{2}{n^2}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión tiende a cero si $n \to \infty$, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \ge 2$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < \varepsilon$ (basta tomar algún n suficientemente grande de modo que $\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} < \varepsilon$). **[0.6pto]**

4. Problemas resueltos

[1] Considere

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Pruebe que f es diferenciable en $x \neq 0$.
2. Pruebe que f no tiene derivada en 0.

Solución:

1. En $x \neq 0$ se cumple que f es diferenciable por ser producto y composición de funciones diferenciable. Para calcular f' utilizamos el álgebra de derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

2. Para $x = 0$, utilizando la definición de derivada se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\operatorname{sen}(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

pero este límite no existe, luego f no puede ser derivable en 0.

[2] Para la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que g es diferenciable en $\mathbb{R}$

Solución:

En forma análoga al problema anterior se tiene que g es diferenciable para $x \neq 0$, su derivada vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ahora para $x = 0$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{h}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0. \end{aligned}$$

Observación: un error típico del estudiante es dar un argumento del estilo: "$f'(0) = 0'$ y como la derivada de una constante es 0 se sigue que $f'(0) = 0$". lo cual constituye un error conceptual grave, el estudiante debe recordar que la derivada **siempre** es un límite. En este caso es incorrecto emplear el álgebra de derivadas (¿por que?).

[3] Considere los reales a, b tales que $0 < a < b$. Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) que satisface la propiedad

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ y } f'(a) = 0.$$

1. Mostrar que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen.
2. Resuelba el problema anterior si ahora $a = 0$.

Solución:

1. Para que la tangente a f en el punto c pase por el origen es necesario que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$ ver Figura 1

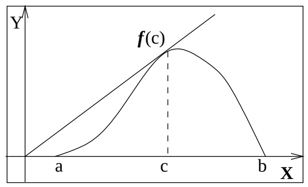


Figura 1: notemos que la pendiente de la recta tangente en c es $\frac{f(c)}{c}$.

Consideremos entonces $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $g(x)$ es continua en [a,b] y derivable en (a, b) ademas $g(a) = g(b) = 0$. Utilizando el teorema del valor medio para g se tiene que $\exists c \in (a, b)$ tq :

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

por lo tanto

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tq } f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

2. $a = 0$ propuesto. Indicación considere la función auxiliar definida en $[0, b]$

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)}{x} & \text{si} 0 < x \leq b \\ 0 & \text{si} x = 0. \end{cases}$$

[4] Demuestre usando el Teorema del Valor Medio (TVM) que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Solucion:

Sea $x > 0$ y consideremos la función $f(t) = \ln(1 + t)$, la cual, es continua en el intervalo [0,x] y diferenciable en (0,x) por el TVM. $\exists \xi \in (0, x)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

en nuestro caso $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$ pero:

$$\frac{1}{1+\xi} \leq 1 \quad \text{pues } \xi > 0$$

ademas

$$\frac{1}{1+\xi} \geq \frac{1}{1+x} \quad \text{pues } \xi < x$$

luego

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$$

y como $x > 0$ se tiene el resultado (nota: el caso $x = 0$ es directo).

[5] Demostrar usando el Teorema del Valor Medio Generalizado (TVMG) que $\forall x \in (0,1)$

$$1 < \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución:
Sea $f(t) = \arctan t$ y $g(t) = \arccos t$, estas funciones son continuas en $[0,1]$ y derivables en $(0,1)$ además

$$f'(t) = \frac{1}{1-t^2} \;\; \text{y} \;\; g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

por TVMG. $\exists \xi \in (0,x)$ tal que:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{1}{1-\xi^2}}{-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{\arccos x - \arccos 0}$$

notemos que $\arctan 0 = 0$ y $\arccos 0 = \pi/2$ luego

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$$

y como $\xi \in (0,x)$ se obtiene que

$$1 < \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[6] Estudiar completamente la función

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2},$$

indicando:

1. Dominio, ceros, continuidad, eventuales reparaciones de discontinuidad, asíntotas de todo tipo, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos
2. Concavidad, puntos de inflexión, recorrido y gráfico.

Solución:

1.
   - Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   - Ceros: $f(x) = 0$ en $x = -1$.
   - f es continua en su dominio y no es reparable en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\infty$
   - Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas:
     - Verticales: f posee una asíntota vertical en $x = 1$
     - Horizontales: no tiene

- Oblicuas:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 \\
n &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = 5
\end{aligned}
$$

  Asíntota oblicua de ecuación $y = x + 5$

- Crecimiento: Cálculo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \text{ en } x = 1 \;\vee\; x = 5 \\
f'(x) &\geq 0 \text{ ssi } x \in (-\infty, 1) \cup [5, \infty) \\
f'(x) &< 0 \text{ ssi } x \in (1, 5)
\end{aligned}
$$

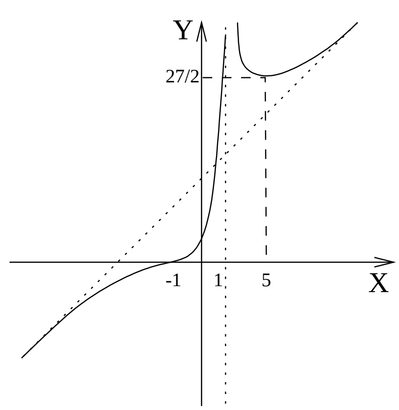
2. - Concavidad e inflexiones: Cálculo de $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \text{ si } x = -1 \text{ punto de inflexión} \\
f''(x) &\geq 0 \text{ si } x \in (-1, 1) \cup (1, \infty) \text{ convexa} \\
f''(x) &< 0 \text{ si } x < -1 \text{ concava}
\end{aligned}
$$

- Gráfico

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
$f(x)$		0		$\nexists$		$\frac{27}{2}$	
$f'(x)$	$\overset{>0}{\nearrow}$	0	$\overset{>0}{\nearrow}$	$\nexists$	$\overset{<0}{\searrow}$	0	$\overset{<0}{\nearrow}$
$f''(x)$	$\overset{<0}{\text{Concava}}$	0	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$	$\nexists$	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$		$\overset{>0}{\text{Convexa}}$



- Recorrido: $\mathbb{R}$