U. DE CHILE

INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 3, 2004

Disponible en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`

Continuidad y Límites

Índice

1. Problemas

[1] Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, **justificando claramente** su respuesta.

- Una función f es continua en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si existe una sucesión (a_n) que converge a x_0 y tal que $f(a_n)$ converge a $f(x_0)$.
- Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo.
- Toda función acotada inferiormente y decreciente alcanza su mínimo.
- Es equivalente decir: (i) $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
  (ii) Cualquiera sea la sucesión de puntos en $\mathrm{Dom}\, f$ propiamente convergente a x_0, la sucesión de sus imágenes es convergente a l.
- (i) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} x^q = x_0^q \ \ \forall q \in \mathbb{Q}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} |x| = |x_0|$
- (i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x} = 0$
- (i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 7x + 1) = 15$ (iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^2-a^2)}{(x-a)} = 1 + a$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)}{(x-a)} = 1 - a^{n-1}$
- Si $f(x) < g(x)\ \forall x \in V_r(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, entonces $a < b$.
- Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x^2)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $|f(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces f es continua en 0.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en 0 y verifica $f(x + y) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces f es continua en cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Toda función Lipschitziana en su dominio es uniformemente continua sobre él.
- Toda función estrictamente creciente y biyectiva es continua.
- Toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua sobre él.

[2] Usando la definición $(\epsilon - \delta)$ demuestre:

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5}{x-2} = 5$ (ii) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) = 0$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\text{sen}^2 x} = 0$

[3] Demuestre que (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - l) = 0$

[4] Demuestre que (i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = l$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(|x|)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$

[5] Sean a, x_0, b tales que $a < x_0 < b$ yf una función cuyo dominio incluye al conjunto $[a, x_0[\cup]x_0, b[$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

[6] Determinar puntos de continuidad de las siguientes funciones

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{x^3-x}{x-1}$ (iii) $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ (iv) $\frac{e^x}{x}$ (v) $\frac{\ln(1+x)}{\text{sen}(x)}$ (vi) $\sqrt{1+\ln^2(1+x^3)}$ (vii) $\frac{\cos(x)-\text{sen}(x)}{\cos(2x)}$.

[7] Estudie la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones.

1. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
2. (i)$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

[8] Calcular los siguientes límites

1. (i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x-3}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ (iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-a-b}{x^2-a^2}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\frac{\pi}{2} - x)\tan x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x\,\text{sen}\,x}{x\,\text{sen}\,3x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$
3. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\frac{x}{a}]\frac{b}{x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\tan^2 x)^{cot^2 x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{2}{x})^x$
4. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x}{1+x})^x$ (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\cos(\frac{a}{x}))^x$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2(1-\cos(\frac{1}{x}))$
5. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
6. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3(e^x-1)}{(1-\cos 2x)^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(\frac{x+a}{x-a})$

[9] Determinar el valor de c, si se sabe que: $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = 4$

[10] Estudiar si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, en que $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \\ \frac{2x^2-3}{x^2+3} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

[11] Calcular las asíntotas oblicuas para las siguientes funciones:

1. (i) $f(x) = \frac{x^2+a}{x}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$
2. (i) $f(x) = (1-e^{-x})(mx+n)$ (ii) $f(x) = x^2\,\text{sen}(\frac{1}{x})$

[12] Dada la función definida por $f(x) = \ln(1+e^x)$ se pide:

i) Determinar dominio, recorrido, ceros, intersección con el eje Y, asíntotas de todo tipo y bosquejar su gráfico.

ii) Determinar la ecuación de la función inversa y bosquejar su gráfico.

[13] Estudiar las siguientes funciones:

1. (i) $f(x) = x\ln(e + \frac{1}{x})$ (ii) $f(x) = e^{1/x}(1 + \frac{1}{x})$ (iii) $f(x) = e^{-1} + xe^{1/x}$
2. (i) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ (ii) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}$

[14] Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ demostrar que

(i) f es continua en $\mathbb{R}$. (ii) Encontrar las asíntotas de f

[15] Considere las siguientes funciones $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ¿Cuales de ellas definen una métrica en $\mathbb{R}$?

1. (i) $d(x, y) = 0$ (ii) $d(x, y) = |x|$ (iii) $d(x, y) = x - y$
2. (i) $d(x, y) = (x - y)^2$ (ii) $d(x, y) = |x| - |y|$ (iii) $d(x, y) = |x| + |y|$

[16] (i) Sea $E \neq \emptyset$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inyectiva. Probar que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica en E.

(ii) Utilice (i) para decidir cuál(es) de las funciones siguientes son métricas en $\mathbb{R}$.

1. (i) $d(x, y) = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ (ii) $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$
2. (i) $d(x, y) = ||x| - |y||$ (ii) $d(x, y) = |e^x - e^y|$

[17] Determine los interiores, adherencias y fronteras (respecto a la métrica usual en $\mathbb{R}$) de los siguientes conjuntos:

1. (i) $[0, 1]$ (ii) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $]-2, 4[$
2. (i) $[1, 7]\cup]5, 7[$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$ (iii) $\mathbb{N}$
3. (i) $\mathbb{Q}$ (ii) $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. (i) $\mathbb{Q}^+$ (ii) $\{\frac{m+n}{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

[18] Determine los puntos de acumulación de los conjuntos siguientes e indique si son abiertos o cerrados.

1. (i) $(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$ (ii) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2. (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid\ x = \frac{\operatorname{sen} \frac{n^2\pi}{2}}{1+\cos \frac{n^2\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{-1, 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid\ x = (1 + \frac{1}{n})^{(-1)^n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$

[19] Probar que

1. (i) $\operatorname{Int}(A) \subset A$ (ii) $A \subset \operatorname{Adh}(A)$
2. (i) $\operatorname{Adh} A = (\operatorname{Int}(A^c))^c$ (ii) $\operatorname{Int} A = (\operatorname{Adh}(A^c))^c$
3. (i) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ (ii) $A \subset B \Rightarrow adhA \subset \operatorname{Adh} B$
4. (i) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$ (ii) $\operatorname{Adh}(\operatorname{Adh} A) = \operatorname{Adh} A$
5. (i) Probar que $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$ (ii) Probar que $\operatorname{Adh} A \cup \operatorname{Adh} B = \operatorname{Adh}(A \cup B)$
6. (i) $\operatorname{Adh}(A \cap B) \subset \operatorname{Adh} A \cap \operatorname{Adh} B$ (ii) $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A^c$ (iii) $\operatorname{Fr} A$ es cerrado.

2. Preguntas de Controles de años anteriores

[1] Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r < 1$,

1. Pruebe que: $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ |x_{n+1}| \leq (r+\epsilon)|x_n|$. (Ind. $|x| - |y| \leq |x-y|$).
2. Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

[2] (i) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, demostrar que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, es continua.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in \mathbb{R}),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, demuestre que f es continua.

[3] Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi/2x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

Demostrar que no hay forma de elegir α de modo que f sea continua en 0.

[4] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, se define la función $f \colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \max\{g(t), t \in [0,x]\}$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ es tal que: $g(x_0) < f(x_0)$, entonces $(\exists\epsilon > 0)$ tal que f es constante en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$

[5] Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

[6] Calcular los siguientes límites si es que existen.

1. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^p - a^p}{x^p}$, $p > 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} mx}$, $m \neq 0, n \neq 0$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x^2}{1-\cos x}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3(e^x - 1)}{(1-\cos 2x)^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

[7] Determinar el dominio y estudiar la continuidad de la función$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2x}-1}$. ¿Cómo se debe definir f en $x = 0$ de modo que resulte continua en dicho punto?.
Indicación: recordar que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, x < 1$.

[8] 1. Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x + \ln(x) & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ \arctan((x-2)^2) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$
2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

[9] 1. Demuestre que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ es uniformemente continua.
2. Demuestre que la función $\tan : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

[10] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2) f es continua en 0.

Demuestre que:

1. f es uniformemente continua
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$

[11] Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones.

(i) $\left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ (ii) $\left(\frac{4n+\frac{1}{3}}{4n+1}\right)^n$

(iii) $\left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{a^n+b^n}\right)$, con $a > b > 0$. (iv) $\frac{(-n)^{n+1}}{(n+1)^n}$

[12] 1. Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio. (ind: Demuestre que $h(1) = 0$).

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

a) Muestre que:
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$$

b) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Probar que si g es continua en a y a_n es una sucesión que converge a a, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$$
existe y vale $-g(a)$.

[13] Para
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(1 - x)^2}{(x - 2)}$$
determinar

1. Dominio, ceros y signos.
2. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
3. Conjunto de puntos de continuidad.
4. Gráfica.

[14] Determinar el conjunto de parámetros (a, b, c) con $a, b, c > 0$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen}(bx)x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\ln(c+(a+b)x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

[15] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. Suponga que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. Pruebe que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 + f(x) = 0$.
2. Suponga que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Pruebe que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 + f(y) \leq x^2 + f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Utilice los teoremas centrales de las funciones continuas.

[16] Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3+s_n^2}{a+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

1. Demuestre por inducción que $s_n > a$, $\forall n \geq 1$.
2. Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L.
3. Encuentre el valor de L. Justifique rigurosamente su resultado.

[17] Sea $a > 0$. Utilizando las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1, \qquad 1 + x \leq \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

1. Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,
2. Si $s_n \to -a$ con $s_n > -a$.

[18] Sea $a > 0$. Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{x}{a^2-x^2}\right) & \text{si} \quad -a < x < a \\ \alpha & \text{si} \quad x \leq -a \\ \beta & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a \quad$ y/o $\quad x = a$. Justifique claramente su respuesta.
<u>Indicación:</u> en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

[19] Definimos la función en $\mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.
3. Usando el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1, 1[$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
   <u>Indicación:</u> analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.
4. Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.
   <u>Indicación:</u> use nuevamente el T.V.I.

[20] Calcular los siguientes límites

1. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a-x)-2\operatorname{sen} a}{x^2}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$
3. (i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ $a, b > 0$ (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x - x\ln(e + \frac{1}{x})$

[21] Se sabe que la función f indicada, es continua en todo su dominio. Especificar cual es el dominio y calcular cual es el valor de k

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0. \end{cases}$$

[22] 1. Demostrar que la ecuación $\exp(x)\cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales. Indicación: Considerar intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ para aplicar el teorema del valor intermedio.

2. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) < g(x) \forall x \in [a,b]$. Demostrar que existe un real $k > 0$ tal que $f(x) + k < g(x) \forall x \in [a,b]$.

3. muestre que la función $f(x) = \sqrt{3x+5} - x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $[\frac{2}{3}, 5]$.

3. Autoevaluación Control #3 Año 2003

P1.- **(i)** (3 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(ii) (3 ptos.) Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x - a}$$

en función de a, usando el cambio de variables $u = \arcsin x - \alpha$, donde $\alpha = \arcsin a$. Indicación: puede serle útil la fórmula del seno de la suma.

Pauta.- **(i)** ∘ **Continuidad para** $x \neq 0$. Claramente f es una función continua en los intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ por álgebra de funciones continuas (la suma, producto, división si el denominador no se anula y composición de funciones continuas es continua).

∘ **Continuidad por la derecha en** $x = 0$. Por límites laterales, podemos calcular:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

⋄ Método 1: usando los límites conocidos vistos en clases:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

En efecto:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

⋄ Método 2: otro método, mucho más largo pero instructivo, es utilizar las desigualdades fundamentales de las funciones exponencial y logaritmo vistas en clases:

$$x + 1 \leq e^x \leq \tfrac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$$
$$\tfrac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

De la primera, restando 1 se obtiene que

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x},$$

de la segunda, tomando $y = 1 + x$ (si $x > -1$ entonces $y > 0$) se tiene que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(1+x)} \leq \frac{1+x}{x}$$

pues los términos comparados son positivos.
Combinando lo anterior se obtienen las cotas siguientes:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \leq \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \leq \frac{x}{1-x}\frac{1+x}{x} = \frac{1+x}{1-x},$$

que son validas para $-1 < x < 1$. Del teorema de comparación (Sandwich), tomando límite cuando $x \to 0^+$ se deduce que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

Cualesquiera de los dos métodos anteriores indica que el valor de β debe ser necesariamente:

$$\beta = 1.$$

- **Continuidad por la izquierda en $x = 0$.** Calculemos el límite:

$$\lim_{x \to 0^-} (x - \alpha)^2.$$

Por álgebra de límites (o por continuidad de los polinomios), es directo que este límite existe $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y vale α^2.
Imponiendo la restricción de continuidad en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

se obtiene la condición

$$1 = \alpha^2$$

de donde

$$\alpha = 1 \text{ o bien } \alpha = -1.$$

(ii) Notemos primero que

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x - \alpha \Rightarrow x = \sin(u + \alpha) \\ a &= \arcsin \alpha \Rightarrow \alpha = \sin a, \end{aligned}$$

de donde

$$x \to a \Rightarrow u \to 0.$$

Haciendo el cambio de variables el límite pedido queda entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x - a} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin(u + \alpha) - a}.$$

Calculemos este último límite utilizando la indicación (seno de la suma):

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(u+\alpha)-a} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\cos\alpha\sin u + a\cos u - a}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\cos\alpha\frac{\sin u}{u}+a\frac{\cos u-1}{u}}\\ &= \frac{1}{\cos\alpha},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el álgebra de límites y los límites trigonométricos conocidos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\cos u-1}{u}=0.$$

Finalmente, como

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

se obtiene

$$\lim_{x\to a}\frac{\arcsin x-\arcsin a}{x-a}=\frac{1}{\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}.$$

Asignación de puntaje P1:

(i)	[**0.5pto**]	Justificar continuidad para $x\neq 0$
	[**1pto**]	Cálculo del límite
	[**0.5pto**]	Encontrar β por continuidad
	[**0.5pto**]	Cálculo del límite con α
	[**0.5pto**]	Encontrar valores de α por continuidad
(ii)	[**0.5pto**]	Buen despeje de x y reescritura del límite
	[**0.5pto**]	Ver bien que si $x\to a$ entonces $u\to 0$
	[**0.5pto**]	Utilización seno de la suma
	[**0.5pto**]	Utilización de límites trigonométricos
	[**0.5pto**]	Valor del límite en α
	[**0.5pto**]	Reescritura en a

P2.- **(i)** (3 ptos) Sean $f,g:[0,1]\to[0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c\in[0,1]$ tal que $f(c)=g(c)$. Indicación: analice los valores de g en los puntos donde f alcanza sus valores extremos.

(ii) (3 ptos) El objetivo de este problema es probar que toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(a)\leq f(x).$$

Para ello considere $y_0=f(0)$ y el intervalo $I=[-y_0,y_0]$.

(a) (1.5 ptos) Demuestre que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus I,\quad f(x)>y_0.$$

(b) (1.5 ptos) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.

Pauta.- **(i)** Sea $h=f-g$ que también es una función continua en $[0,1]$ (pero no necesariamente epiyectiva!). Debemos probar que $\exists c\in[0,1]$ tal que $h(c)=0$. Para ello la idea es usar el TVM para h, Usamos la indicación: como f es epiyectiva, el valor máximo que toma es 1 digamos en algún $x_1 \in [0,1]$. Del mismo modo, el mínimo valor que toma es 0 en algún $x_0 \in [0,1]$. Por otro lado $0 \leq g(x) \leq 1\ \forall x \in [0,1]$, de donde

$$g(x_1) \leq 1 = f(x_1) \quad \text{y} \quad g(x_0) \geq 0 = f(x_0).$$

Esto es, probamos que

$$\exists x_1, x_0 \in [0,1] \text{ tales que } \quad h(x_1) \leq 0, \quad h(x_0) \geq 0$$

y del TVM se concluye la propiedad.

(iia) Tenemos que

$$x \in \mathbb{R} \setminus I \ \Rightarrow\ |x| > y_0$$

pero

$$f(x) \geq |x|$$

de donde por transitividad

$$f(x) > y_0.$$

(iib) f es continua en I (intervalo cerrado y acotado) por lo que alcanza su mínimo en I, esto es:

$$\exists a \in I \quad \text{tal que} \quad f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

Fuera de I, el punto a sigue siendo un mínimo, en efecto, como $0 \in I$, entonces:

$$f(a) \leq f(0) = y_0$$

y de la parte anterior se deduce que

$$f(a) \leq y_0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I.$$

Nota: esta pregunta también se puede hacer con un intervalo $[-y, y]$ donde y está en la imagen de f, pero en ese caso adicionalmente hay que probar que se puede escoger una preimagen de y en I (lo que no es necesario si la preimagen es 0). También se puede hacer por reducción al absurdo, pero es complicado: si f no tiene mínimo, al menos tiene ínfimo porque es acotada inferiormente (es positiva). Sea a_n una sucesión tal que $f(a_n)$ converja al ínfimo, entonces o bien a_n es acotada, en cuyo caso pasando al límite en una subsucesión se ve que el ínfimo se alcanza en el límite de esta subsucesión, o bien es no acotada, caso en que tomando límite se viola la desigualdad $f(a_n) \geq |a_n|$.

Asignación de puntaje P2:

(i)	**[0.5pto]**	Entender que se trata de TVM
	[0.75pto]	Existencia de valores máximos y mínimos de f
	[0.75pto]	Utilizar las cotas para g
	[1pto]	Utilizar bien el TVM
(iia)	**[0.5pto]**	Transcripción a desigualdad de $x \in \mathbb{R} \setminus I$
	[0.5pto]	Uso de la hipótesis $f(x) \geq \|x\|$
	[0.5pto]	Uso de la parte anterior
(iib)	**[1pto]**	Teorema f alcanza su mínimo en $[a,b]$
	[0.5pto]	Utilizar la parte anterior

P3.- **(i)** (3 ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demostrar que $\exists \overline{x} \in [a,b]$ tal que $\ell = f(\overline{x})$.

(ii) **(a)** (1 pto) Sea $k \in \mathbb{N}$. Usando subsucesiones, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n.$$

(b) (2 ptos) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n+a}\right).$$

Use este resultado para concluir el valor de $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^n$.

Pauta.- **(i)** Del teorema de Bolzano Weierstrass, existe una subsucesión $a_{\varphi(n)}$ de a_n que es convergente. Llamando $\overline{x}$ al límite tenemos

$$a_{\varphi(n)} \to \overline{x}.$$

Pero por continuidad de f:

$$f(a_{\varphi(n)}) \to f(\overline{x}).$$

Ahora notemos que

$$f(a_{\varphi(n)}) \quad \text{es una subsucesión de} \quad f(a_n)$$

por lo que por hipótesis

$$f(a_{\varphi(n)}) \to \ell.$$

Finalmente, por unicidad del límite

$$f(\overline{x}) = \ell.$$

(iia) Dado $k \in \mathbb{N}$ fijo, y si sabemos que

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

tomamos la subsucesión $a_{\varphi(n)}$ con $\varphi(n) = n + k$ para obtener que

$$a_{n+k} \to e.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{-k} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{-k} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= 1^{-k} \lim_{n\to\infty} a_{n+k} \\
&= e
\end{aligned}$$

(iib) Se sabe de clases que

$$s_n \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+s_n)}{s_n} = 1$$

lo que viene de la desigualdad vista en clases:

$$\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

Entonces reescribimos el primer límite pedido como

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+a} \, \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}}$$

y es claro que

$$s_n = \frac{1}{n+a} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{n}{n+a} \to 1$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+a} \, \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}} = 1.$$

El límite pedido puede obtenerse de la continuidad de la función exponencial (tercera igualdad):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)\right) \\
&= \exp \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) \\
&= \exp 1 \\
&= e.
\end{aligned}$$

Valor que coincide con el límite calculado en el ítem anterior en el caso particular en que a es natural.

Asignación de puntaje P3:

(i)	[**1pto**]	Uso teorema de Bolzano Weierstrass
	[**1pto**]	Continuidad de f
	[**0.5pto**]	Subsucesiones y uso de la hipótesis
	[**0.5pto**]	Unicidad del límite
(iia)	[**0.2pto**]	Elección de la subsucesión correcta
	[**0.3pto**]	Saber que la subsucesión conserva el mismo límite
	[**0.5pto**]	Calculo del límite haciendo aparecer la subsucesión
(iib)	[**0.5pto**]	Entender que se trata del primer límite del logaritmo para un $s_n \to 0$
	[**0.5pto**]	Primer límite pedido
	[**0.5pto**]	Segundo límite pedido
	[**0.5pto**]	Comentar que la continuidad de exp permite intercambiar los límites