Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas de Trigonometría, 2004

P1.- Demuestre que tan es π–periodica.

Solución:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\pi) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}\\ &= \tan\alpha \quad \forall\alpha, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

P2.- Encontrar $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\tan\alpha$ en función de $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$, para $\alpha\neq\pi+2k\pi\ k\in\mathbb{Z}$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}\tan\alpha = \tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Ya tenemos $\tan\alpha$ en función de t, a partir de esto calculemos $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$.

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= \cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.\end{aligned}$$

notando que $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 &= 2\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}-1\\ &= \frac{2}{1+t^2}-1 = \frac{1-t^2}{1+t^2};\\ \operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cos\alpha &= \frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

P3.- (Propuesto) Demostrar que

$$\alpha,\beta\in[0,\pi/2[\Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=t.$$

P4.- (Propuesto)

a) Demostrar las fórmulas de transformación

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{1}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{3}$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}\,\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{4}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \tag{5}$$

b) Utilizar lo anterior para demostrar que $(f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = -g(x) + 2k\pi \tag{6}$$

$$\mathrm{sen}\, f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \tag{7}$$

$$\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x), g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \tag{8}$$

P5.- Resolver aplicando 4

$$\mathrm{sen}\,2x = \cos\frac{x}{2}$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico. ¿Es $\frac{3\pi}{5}$ solución?

Solución: notemos que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$, utilizando esto y aplicando los resultados de 4 se obtiene:

$$\mathrm{sen}\,2x = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

lo que implica

$$2x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi \qquad \vee \qquad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{i.e. } x = \frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}k \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k \quad k \in \mathbb{Z}$$

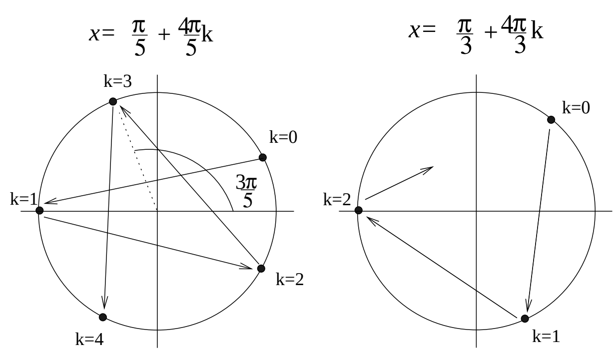


Figura 1: notemos que las soluciones nunca pasan por $\frac{3\pi}{5}$ sino que por ángulos *coincidentes* con $\frac{3\pi}{5}$.

Nota: observemos entonces que si un ángulo es solución de una ecuación trigonométrica, un ángulo coincidente con dicha ecuación puede *NO* satisfacer la ecuación.

P6.- (Propuesto) Resolver $\operatorname{sen}^2(2x+\frac{\pi}{6}) = \cos^2(x+\frac{\pi}{3})$.

P7.- Probar que son iguales como funciones de $x \geq 0$

$$\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} \quad \text{con } a > 0.$$

Solución: veamos si las funciones están bien definidas

Dado $x \geq 0$ luego $x + a > 0$, además, $x < x + a \Rightarrow \frac{x}{x+a} < 1$ luego $0 \leq \frac{x}{x+a} < 1$ (está dentro del dominio de arc sen.)

Para $x \geq 0$ y $a > 0$ se tiene que $\frac{x}{a} \geq 0$ (está dentro del dominio de arctan.)

Como $\operatorname{arc\,sen}[0,1[= [0,\frac{\pi}{2}[$ y $\arctan[0,\infty[= [0,\frac{\pi}{2}[$ las funciones compuestas:

$$\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{\cdot}{\cdot + a}} : [0,\infty[\to [0,\frac{\pi}{2}[\qquad\qquad \arctan\sqrt{\frac{\cdot}{a}} : [0,\infty[\to [0,\frac{\pi}{2}[$$

tienen igual dominio y conjunto de llegada.

Probemos que

$$\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} \quad \text{con } a > 0,$$

a través de una cadena de equivalencias:

Recordemos antes que

- si $\alpha, \beta \in [0, \pi/2[$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ pues sen es una función inyectiva en $[0,\pi/2[$.
- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Veamos

$$\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan\sqrt{\frac{x}{a}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\right) = \operatorname{sen}\left(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{\frac{x+a}{a}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$$

P8.- (Propuesto) Calcular

$$y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{1+a^2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{1+a^2}\right)\right)$$

P9.- Utilice 4 para probar que

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Solución: Por el problema 4 sabemos que

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

pero como tan es una función impar se sigue que $\tan(-\beta) = -\tan\beta$ y como cos es una función par $\cos(-\beta) = \cos\beta$ luego:

$$\begin{aligned}\tan\alpha - \tan\beta = \tan\alpha - \tan -\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha-(-\beta))}{\cos\alpha\cos\beta}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.\end{aligned}$$

(En resumen $\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$) luego si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ entonces

$$\tan\alpha + \tan(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)} = 0$$

de esta forma

$$\tan\alpha + \frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} = 0 \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

P10.- *a*) $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

b) Mostrar que $\cos^2 x + = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

c) Resolver $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x = 0$.

Solución:

a) Sea $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $b=\frac{\alpha-\beta}{2}$ luego $\alpha=a+b$ y $\beta=a-b$ reemplazando

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \cos(a+b)+\cos(a-b)\\ &= \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b + \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\\ &= 2\cos a\cos b = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

b) $\cos 2x = \cos(x+x)$ luego

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)\\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

c) Notemos que por la parte (a) se tiene que

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

y de la parte (b)

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x$$

luego la ecuación

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x = 0$$

es equivalente a resolver

$$2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x = 0$$

factorizando por $\cos x$ y utilizando nuevamente la parte (a)

$$\cos x(\cos x+\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}) = 0$$

por lo tanto $\cos x = 0 \ \vee \ \cos\frac{3x}{2} = 0 \ \vee \ \cos\frac{x}{2} = 0$ de donde se deduce que $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \vee \ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi \ \vee \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi$

P11.- Resolver la ecuación

(E) $$a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x = c$$

(i) Para $ab = 0$ (ii) Para $ab \neq 0$

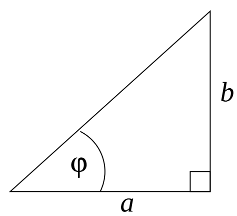
Solución: (i) Para $ab = 0$ entonces $a = 0 \vee b = 0$, se obtienen casos que ya sabemos resolver

- $a = 0 \wedge b = 0$ en este caso (E) tiene solución si y sólo si $c = 0$.
- $a = 0 \wedge b \neq 0$ en este caso (E) corresponde a resolver $\mathrm{sen}\,x = -\frac{c}{b}$, luego, si $-\frac{c}{b} \notin [-1,1]$ (E) no tiene solución, Si $-\frac{c}{b} \in [-1,1]$ (E) tiene solución y esta es $x = \mathrm{arc\,sen}\left(-\frac{c}{b}\right) + 2k\pi$ ó $x = \pi - \mathrm{arc\,sen}\left(-\frac{c}{b}\right) + 2k\pi$.
- $a \neq 0 \wedge b = 0$ en este caso (E) corresponde a resolver $\cos x = -\frac{c}{a}$, luego, si $-\frac{c}{a} \notin [-1,1]$ (E) no tiene solución, Si $-\frac{c}{a} \in [-1,1]$ (E) tiene solución y esta es $x = \pm \arccos\left(-\frac{c}{b}\right) + 2k\pi$.

(ii) Para $ab \neq 0$ entonces $a \neq 0 \vee b \neq 0$, y por lo tanto $a^2 + b^2 > 0$. Si escribimos (E) como

(E) $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\,x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Podemos definir (ver figura)



$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad \text{pues } \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1].$$

y se cumple

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ y } \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

luego, (E) se escribe

(E) $$\cos\varphi\cos x + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

es decir

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y por lo tanto si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$ se sigue que (E) no tiene solución, en cambio, si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ (E) posee solución y se cumple que $x - \varphi = \pm\arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi$. Resumiendo, si $ab \neq 0$

$$a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x = c \Rightarrow x = \underbrace{\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}_{\varphi} \pm \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi.$$

P12.- (Propuesto) Resolver $\sqrt{3}\cos x + \mathrm{sen}\,x = 1$.