U. DE CHILE

INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 2, 2004

disponible en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`

Funciones, Trigonometría y Sucesiones

Índice

1. Problemas

[1] Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando claramente su respuesta. Sean $f, g : A \to B$ funciones.

- f estrictamente creciente implica f inyectiva.
- f biyectiva implica que f no es par.
- $A = [a, b]$, $a \leq b$ y f inyectiva entonces $f(a) < f(b)$ implica $f(x) > f(a)$ para todo $x \in]a, b]$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ $\cos(\frac{x}{2}) = -\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$.
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$
- En un triángulo de lados a b y c se satisface que $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2})$, con α el ángulo interior opuesto al lado a.
- Si $p(n)$ y $q(n)$ son dos polinomios de grado 10 y 11, respectivamente, y con raíces negativas, entonces $u_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ converge a 0.
- La sucesión $a^n n^k$ con $0 < a < 1$ y $k \in \mathbb{N}$ diverge a $+\infty$.
- La sucesión $\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ diverge.
- Una sucesión monótona y acotada es convergente.
- Toda sucesión convergente es acotada.
- Toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente, tales que $u_n < v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $u < v$.
- Una sucesión acotada posee al menos un punto de acumulación.
- El límite de la sucesión $\frac{a^n}{n!}$ es cero.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ implica $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq 1 + x$.
- La función a^x es estrictamente decreciente para $a > 1$.
- La función $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ es biyectiva y su inversa es $\log_{\frac{1}{a}}$.

- Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ $a^{\log_a(x)} = x$.
- Para todo $a > 0$ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

[2] Para las siguientes evaluaciones de $f(x)$ determinar el mayor subconjunto A de $\mathbb{R}$ donde $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función. Además encontrar el conjunto imagen, ceros, intervalos de crecimiento o decrecimiento, paridad, periodicidad, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Realizar un gráfico.

1. (i) $f(x) = \sqrt{|x|}$ (ii) $f(x) = ((2x-1)(x^2-9))^{-1}$ (iii) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$
2. (i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (ii) $f(x) = \log_5(x+|x|)$ (iii) $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$.
3. (i) $f(x) = x^3 - x$ (ii) $f(x) = [|x|]$ (iii) $f(x) = (x-[x])^2$.
4. (i) $f(x) = \text{máx}\{7, |x|\}$ (ii) $f(x) = \text{mín}\{7, |x|\}$ (iii) $f(x) = (1+x^2)^{-1}$
5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x[\frac{1}{x}] & \text{si} \quad x \leq -1 \\ [x]\frac{1}{x} & \text{si} \quad -1 < x \leq 1,\ x \neq 0 \\ |2-x^2| & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

[3] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 6x - x^2 - 5$. Se pide analizar las funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

1. (i) $g(x) = f(x)$ (ii) $g(x) = |f(x)|$ (iii) $g(x) = f(|x|)$ (iv) $g(x) = |f(|x|)|$.

[4] Dado $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $h(x+1) = x^2 + 3x + 2$, se pide determinar $h(x)$.

[5] Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función donde $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Pruebe que f en el intervalo $(0,1)$ es decreciente, que en el intervalo $(1,\infty)$ es creciente.
2. Pruebe que para todo $x > 0$ es cierto que $f(x) \geq 2$. Muestre que f es impar y deduzca que para todo $x < 0$, $f(x) \leq 2$.
3. Se define el conjunto $A = \{\sqrt[n]{2} : \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Pruebe que $\inf(A) = 1$.
4. Demuestre que $\inf(f(A)) = 2$.

[6] Para la expresión $f_a(x) = \log_a(\frac{1}{a-\sqrt{a-x}})$ con $a > 1$.

1. Determine el mayor subconjunto A para que $f_a : A \to \mathbb{R}$ sea una función.
2. Estudie el crecimiento de f_a.
3. Demuestre que f_a tiene un único cero que denotaremos $z(a)$.
4. Calcule $\inf\limits_{x \in Dom(f)} f_a(x)$ y $\sup\limits_{a>1} z(a)$
5. Bosqueje el gráfico de f_a.

[7] Probar las siguientes identidades trigonométricas.

1. (i) $\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{tg}(x) + \cos^2(x)\operatorname{cotg}(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x)$
   (ii) $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = \sec(x)\operatorname{cosec}(x)$
2. (i) $\cos^4(x) - \operatorname{sen}^4(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$. (ii) $(\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x))^2 = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$.
3. (i) $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} = \frac{\sec^2(x) - \sec(x)\operatorname{tg}(x)}{\cos^2(x)}$. (ii) $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{cotg}(x)} + \frac{\sec(x)}{\operatorname{cosec}(x)} = \frac{2\operatorname{cotg}(x)+1}{\operatorname{cotg}^2(x)}$

4. (i) $(\operatorname{sen}(x)-\operatorname{cosec}(x))^2+(\cos(x)-\sec(x))^2=\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{cotg}^2(x)-1$. (ii) $(\sec(x)-\operatorname{tg}(x))^2=\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$.
5. (i) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\sec^2(\frac{x}{2})+\cos(x)\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-\operatorname{sen}(x)=0$ (ii) $\frac{\operatorname{cotg}(x)}{\operatorname{cotg}(x)-\operatorname{cotg}^3(x)}+\frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(3x)}=1$
6. (i) $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}(x)-4\operatorname{sen}^3(x)$ (ii) $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$
7. (i) $(\cos(\frac{x}{2}-\operatorname{sen}(\frac{x}{2}))^2=1-\operatorname{sen}(x)$. (ii) $\operatorname{cosec}(2x)-\operatorname{cotg}(2x)=\operatorname{tg}(x)$.
8. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\sec^2(\frac{x}{2})+\cos(x)\operatorname{tg}(\frac{x}{2})-\operatorname{sen}(x)=0$

[8] 1. Resolver la ecuación $\cos(x)=\frac{2\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}$.

2. Se necesita conocer la altura de un árbol ubicado en la ladera de un cerro. Para esto se ubican dos puntos A y B sobre la ladera (A más abajo que B) a una distancia d y colineales con la base del árbol. Los ángulos de elevación desde A y B hasta la cúspide del árbol son α y β respectivamente y el ángulo de inclinación de la ladera es γ. Calcular la altura del árbol en función de los datos α,β,γ y d.

[9] Demostrar que en todo triángulo de lados a,b,c y ángulos interiores α,β,γ se cumple que

(i) $b\cos(\gamma)-c\cos(\beta)=\frac{b^2-c^2}{a}$ (ii) $a^2\frac{\operatorname{sen}(\beta-\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)}+b^2\frac{\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}+c^2\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$.

[10] Se afirma que $\lim\frac{n^2-1}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$. Determinar un n_0 tal que la diferencia entre $\frac{n^2-1}{2n^2+3}$ y $\frac{1}{2}$ sea menor que $\varepsilon=0{,}0002$ para todo $n>n_0$.

[11] Considere las siguientes sucesiones convergentes, de término general a_n y límite l.

(i) $a_n=\frac{1}{n}$ y $l=0$ (ii) $a_n=\frac{2}{n^2}-1$ y $l=-1$ (iii) $a_n=\frac{5}{n}$, y $l=0$.

Para cada uno de los siguientes valores de ε encuentre el menor n_0 que verifique $n>n_0$ implica $|a_n-l|<\varepsilon$.

(i) $\varepsilon=1$ (ii) $\varepsilon=\frac{1}{10}$ (iii) $\varepsilon=10^{-6}$.

[12] Usando la definición de límite de una sucesión demostrar que

1. (i) $\lim\frac{3n}{1-n}=-3$ (ii) $\lim\log\frac{n+1}{n}=0$ (iii) $\lim\sqrt[n]{a}=1$, $a>1$
2. (i) $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$ (ii) $\lim\frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2}=\frac{2}{3}$ (iii) $\lim\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}=0$.

[13] Si (a_n) es una sucesión tal que $\lim a_{2n}=\lim a_{2n+1}=a$ probar que $\lim a_n=a$.

[14] Sea (u_n) una sucesión que verifica $(\exists n_0)(\forall\varepsilon>0)\quad n>n_0\Rightarrow|u_n-u|<\varepsilon$

Probar que el número de términos distintos de la sucesión es finito.

[15] Pruebe la divergencia de las sucesiones siguientes utilizando dos subsucesiones que lo dejen de manifiesto.

1. (i) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ (ii) $a_n=\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})+\cos(n\pi)$

[16] Las sucesiones dadas dependen del valor de la constante a. Examinar en que casos pueden ser convergentes.

1. (i) $u_n=\frac{a^n}{(n-1)^2}$ (ii) $u_n=na^n$ (iii) $u_n=a\cos(n\pi)$
2. (i) $u_n=(\frac{1}{a})^n$ (ii) $u_n=\sqrt{a+\frac{1}{n}}$ (iii) $\frac{a^n-1}{a^n+1}$.

[17] 1. Probar que si $a\geq b>0$ entonces $\lim\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$.

2. Sean $a_1, \ldots, a_k$ reales positivos. Probar que la sucesión $(\sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n})$ converge y calcular su límite.

[18] Considere la sucesión (a_n) definida por $\frac{2n-5}{2n-7}$

1. Demuestre, usando la definición de límite que (a_n) converge a 1.
2. Determinar para cada valor de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ que términos de la sucesión quedan en el intervalo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ y cuales quedan fuera.

[19] Sea (a_n) una sucesión de números reales. Se dice que $a_n \to +\infty$ ((a_n) diverge a $+\infty$) ssi se cumple la siguiente propiedad $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ \ a_n \geq M$

1. Probar que $a_n \to +\infty$ implica que $\frac{1}{a_n} \to 0$. ¿Es válido el recíproco?.
2. Probar que $a_n \to +\infty$ y $b_n \to l > 0$ implica que $a_n b_n \to +\infty$.
3. Mostrar con ejemplos que si $a_n \to +\infty$ y $b_n \to 0$, pueden tenerse los casos: $a_n b_n \to 0$, $a_n b_n \to +\infty$ y $a_n b_n \to l \neq 0$. ¿Son posibles otros casos?.

[20] Calcular los siguientes límites (si existen).

1. (i) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$ (ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$ (iii) $\lim \sqrt[n]{n}$ (iv) $\lim \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ (v) $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
2. (i) $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (ii) $\lim \frac{a^n+b}{a^n-n}$ (iii) $\lim \cos(a\pi)^{2n}$ (iv) $\lim \sqrt[n]{n^3+n^2+n}$ (v) $\lim(\frac{2n-3}{3n+7})^n$
3. (i) $\lim\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\}$ (ii) $\lim \frac{\sqrt[n]{a+b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ (iii) $\lim \frac{n(-1)^n}{1-(n+3)^4}$ (iv) $\lim(\frac{3n-1}{4n+1})^n$
4. (i) $\lim \left[\frac{a}{n}\right] \frac{n}{b}$ (ii) $\lim \frac{a}{n}\left[\frac{n}{b}\right]$. (iii) $\lim(\frac{x^{-n}+y^{-n}}{2})^{-\frac{1}{n}}$, $x > y > 0$. (iv) $\lim \sqrt{n^2+n} - n$
5. (i) $\lim \sqrt[n]{a^n+b}$ con $a > 1$. (ii) $\lim(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ (iii) $\lim(1-\frac{1}{n})^n$
6. (i) $\lim(1+\frac{5}{n^2})^{n^2}$ (ii) $\lim((1+\frac{1}{n^2})^{n+1})^{n+2}$ (iii) $\lim(\frac{n^2-1}{n^2-n-2})^{\frac{n}{2}}$ (iv) $\lim(\frac{n+2}{2n})^{2n}$.

[21] Sea (u_n) una sucesión de números reales tales que existe $r \in [0,1)$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $(\forall n \geq n_0)|u_{n+1}| \leq r|u_n|$.

(i) probar que $u_n \to 0$. (ii) si $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = r < 1$ entonces $\lim u_n = 0$.

[22] La sucesión (u_n) definida por $u_1 = \alpha + \beta$, $u_{n+1} = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{u_n}$, con $\alpha > \beta > 0$.

(i) Demuestre que $u_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$ (ii) Calcule $\lim u_n$. (iii) Estudie el caso $\alpha = \beta > 0$.

[23] Estudiar y graficar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim(\frac{x^{2n}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})+x^2}{1+x^{2n}})$.

[24] 1. Calcular α y β tales que $\lim(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta)) = 0$
2. Si se sabe que $\lim n(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta))$ existe se pide calcular su valor.

[25] Probar que si (a_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con M fijo en $\mathbb{R}$, entonces (s_n) converge.

[26] Pruebe que las siguientes sucesiones (u_n), definidas por recurrencia, son monótonas y convergentes. Calcule sus límites.

1. $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Indicación: Probar por inducción que $a_n < 2$.
2. (i) $u_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. (ii) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$. (iii) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{4+u_n^2}{2}}$

3. (i) $u_1 = 4$, $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$. (ii) $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \frac{3(1+u_n)}{3+u_n}$.
4. $u_1 = h$, $u_{n+1} = u_n^2 + k$ con $0 < k < \frac{1}{4}$ y $a < h < b$, siendo a y b las raíces de la ecuación $x^2 - x + k = 0$.
5. (i) $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$. (ii) $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$ y $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2}$.
6. $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ y $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

[27] Sean $a, b \in \mathbb{R}_+$. Se definen las sucesiones (x_n) e (y_n) mediante la recurrencia

1. $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$. Probar que se trata de sucesiones monótonas y que $\lim x_n = \lim y_n$.
2. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$. Probar que x_n e y_n son convergentes y que tienen igual límite.

[28] Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Probar que si las sucesiones (x_{2n}), (x_{2n+1}) y (x_{3n}) son convergentes entonces (x_n) es convergente.

[29] Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Probar que $\lim \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{2}$.

[30] Demostrar que las sucesiones u_n que satisfacen uno de los siguientes criterios son sucesiones de Cauchy.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < q^n$, donde $0 < q < 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| < q|u_{n+1} - u_n|$, donde $0 < q < 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

[31] Estudiar la sucesión $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

[32] Probar que si (a_n) es una sucesión de términos positivos convergente a $l > 0$, entonces,

1. la sucesión (u_n) definida por $u_n = \sqrt[n]{s_1 \cdot s_2 \cdots s_n}$ también converge a l.
2. si se cumple que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 0$ entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$

[33] Si $\log(2) = 0{,}30$ y $\log(3) = 0{,}48$ (log es el logaritmo en base 10) calcular

(i) $\log(18)$ (ii) $\log_3(2)$ (iii) $\log(1{,}08)$ (iv) $\log_{\frac{1}{3}}(24)$.

[34] 1. Resolver $\log_y(x) + \log_x(y) = 2$ y $xy = 9$.

2. ¿Qué restricciones debe satisfacer x para que la ecuación $\log_2(\sqrt{x+2}) = \log_4(3x+4)$ tenga solución?. Encuentre la solución.

[35] Resolver los siguientes sistemas:

1. (i) $2^{x+y} = 6^y$ y $3^x = 32^{y+1}$. (ii) $x^y = y^x$ y $x^3 = y^2$
2. (i) $2^{y+1} = 3^{x-1}$ y $2^x = 3^y$. (ii) $a^{2x}b^{3y} = m^5$ y $a^{3x}b^{2y} = m^{10}$.
3. $(ax)^{\log(a)} = (by)^{\log(b)}$ y $b^{\log(x)} = a^{\log(y)}$.

[36] Considere el sistema $\log_a(\frac{x^n}{y^m}) = m^2$ y $\log_a(\frac{x^{n+1}}{y}) = n^2$. Probar que si m y n son naturales consecutivos entonces $x = a^{\min\{n,m\}}$

2. Preguntas de controles de años anteriores.

[1] Sea $f(x) = \begin{cases} (-1)^{1+[x]}\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x-1}{[x]-1} & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{|2x-1|} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \text{ o } x < -1 \end{cases}$

1. Encontrar mayor conjunto A para que $f : A \to \mathbb{R}$ sea una función.
2. Crecimiento y paridad
3. Ceros e intersección con el eje OY.
4. Bosqueje un gráfico.

[2] 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \text{máx}\{x|x|, x\}$. Demuestre que f es biyectiva y determine su inversa.

2. Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x}{|x|-2}$. Pruebe que g no es inyectiva, haga un bosquejo del gráfico y determine el conjunto $g^{-1}(]-2, 2[)$.

[3] Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - |x| - 2$. Calcule $I = \inf\{x/f(x) \leq 0\}$ y $i = \inf\{f(x)/x \leq 0\}$.

[4] Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$.

1. Demuestre que f no es inyectiva.
2. Calcular $f^{-1}([-1, 1])$.
3. Sea $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que $g(x)$ es inyectiva.
4. Restrinja el recorrido de modo de obtener a partir de g una función biyectiva y calcule su inversa.

[5] Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada superiormente. Sea $C = \{\text{máx}\{x, f(x)\}/x \in A\}$. Demuestre que $\sup(C) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(f(A))\}$.

[6] Encontrar los valores de x e y tales que $(x+y)^{\log_{10}(x+y)} = 1000(x+y)^2$ y $\frac{x}{y} \leq 1$.

[7] Considere la fórmula $f(x) = \begin{cases} x - 2n & \text{si} \quad x \in [2n, 2n+1], \ n \in \mathbb{N} \\ 2n + 2 - x & \text{si} \quad x \in [2n+1, 2n+2], \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Verifique que f es una función de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$.
2. Encuentre el mayor conjunto A donde la fórmula $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ define una función.
3. Muestre que $\forall n \in \mathbb{N}, h : (2n+1, 2n+2) \to \mathbb{R}$ con $h(x) = g(x)$ es estrictamente decreciente y que $h' : (2n, 2n+1) \to \mathbb{R}$ con $h'(x) = g(x)$ es estrictamente creciente.
4. Grafique la función $g : A \to \mathbb{R}$.
5. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F : [2n+1, 2n+2] \to (0, \frac{1}{2n+1}]$ con $F(x) = g(x)$ es biyectiva. Encuentre la inversa.

[8] 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + b & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ Demuestre que f es epiyectiva ssi $a \leq b$ y que f es inyectiva ssi $a \geq b$ ¿Cuál es el conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2$/f es biyectiva $\}$?.

2. Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ tal que $\exists c \in]a, b[$ donde f es estrictamente decreciente en $]a, c[$, f es estrictamente creciente en $[c, b[$, demuestre entonces que $f(c) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.

Indicación: Para a) bosqueje un gráfico genérico de f y note que con eso no ha demostrado la proposición.

[9] En un paralelógramo A, B, C, D conocemos los ángulos ABC y BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1. Probar que la longitud del cuarto lado AD es igual a $\sqrt{3 - 2\cos(\alpha) - 2\cos(\beta) + 2\cos(\alpha + \beta)}$.

Indicación: considere una diagonal del cuadrilátero y aplique adecuadamente los teoremas del seno y del coseno.

[10]
1. Sean a, b, c, d reales en progresión aritmética de diferencia r. Resolver la ecuación $\cos(ax)\,\mathrm{sen}(bx) = \cos(cx)\,\mathrm{sen}(dx)$ y expresar las soluciones en términos de a y r.
   Indicación: Transformar productos en diferencias
2. Dos barcos P y Q están anclados en el mar a la vista de un observador que mide la distancia a entre dos puntos A y B de la playa y los ángulos α, β, γ y δ asociados a los puntos PAB, QAB, ABQ y ABP, respectivamente. Calcular la distancia entre P y Q en función de a, α, β, γ y δ.

[11] Un poste y una antena se encuentran a una distancia a en un camino horizontal. Del pie del poste se mide el ángulo de elevación de la antena y del pie de la antena el del poste, encontrándose que el primer ángulo es el doble del segundo. Si un observador se ubica en el punto medio M del trazo que une las bases del poste y de la antena, observa que los ángulos de elevación medidos desde M al poste y a la antena son complementarios. Calcular las alturas de la antena y del poste.

[12]
1. Resuelva la ecuación $\mathrm{sen}^3(x) + \cos^3(x) = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)$
2. Demuestre la identidad $\frac{1}{\mathrm{tg}(3x) - \mathrm{tg}(x)} - \frac{1}{\mathrm{cotg}(3x) - \mathrm{cotg}(x)} = \mathrm{cotg}(2x)$.

[13] Sean $a > b > 0$ dos reales fijos. Considere las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por las fórmulas recursivas $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ y $b_1 = b$, $b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_{n+1}}$. Pruebe que

1. $a_n \geq b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. (a_n) es decreciente y (b_n) es creciente.
3. (a_n) y (b_n) convergen y que $\lim a_n = \lim b_n$.
4. Sea $l = \lim a_n$. Verifique que la sucesión $(a_n b_n)$ es constante y encuentre l.

[14]
1. Pruebe que si (u_n) es una sucesión que satisface la condición siguiente
   $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - u_{n+2}| \geq \frac{1}{2}$ entonces (u_n) no es convergente.
2. Sabiendo que $\lim \sqrt[n]{x} = 1$ para todo $x > 0$, pruebe que si $s_n \to s$ y $s > 0$ entonces $\lim \sqrt[n]{|s_n|} = 1$.
   Indicación: utilice el teorema del sandwich.

[15] Calcule el límite de las siguientes sucesiones de números reales, cuyos términos generales son:

1. $u_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n}}$
2. $u_n = n(|x + \frac{1}{n}| - |x|)$, para $x \in \mathbb{R}$.
3. $u_n = \cos(n!\pi x)$ con $x \in \mathbb{Q}$.

Indicación: En (2) y (3) exprese el límite en términos de x.

[16] Sea (u_n) una sucesión de números reales que satisfacen las siguientes propiedades
$\lim u_{3n} = l$ y $\lim |u_{n+1} - u_n| = 0$. Demuestre que:

1. (u_{3n+1}) y (u_{3n+2}) convergen a l.
2. (u_n) converge a l.

[17]
1. Probar que si $a_n \geq 0$ y $\lim a_n = l$ entonces $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$.

2. Calcular los límites:
   (i) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+3}$ (ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
3. Demostrar, utilizando el teorema de las sucesiones monótonas que $s_n = \frac{10^n}{n!(1+\frac{1}{n})^n}$ converge.

[18] 1. Estudiar por comparación la convergencia de la sucesión $a_n = \left[\frac{1+n(-1)^n}{n^2}\right]$, donde $[x]$ es el cajón de x.
2. Sea (a_n) una sucesión convergente a α y (b_n) una sucesión convergente a β. Demostrar que la sucesión (c_n), definida por $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ es convergente.
3. Sea (a_n) una sucesión convergente a $\alpha > 0$. Demuestre que la sucesión (c_n) definida por $\sqrt{a_n}$ es convergente.
4. Sea (a_n) una sucesión convergente, tal que una infinidad de sus términos son estrictamente positivos y una infinidad es estrictamente negativo. Demuestre que (a_n) converge a 0. De un ejemplo de una sucesión con estas propiedades.

[19] Calcular, si es que existen, los límites de las sucesiones con los siguientes términos generales:

1. (i) $u_n = \sqrt[n+1]{a^n}$, $a > 0$ (ii) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$
2. (i) $u_n = \sqrt[n]{n^3+n^2+n}$ (ii) $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}(n^2)}{n+5}$.
3. $u_n = n\{|x+\frac{1}{n}| - |x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

¡Explique !

[20] 1. Sea (u_n) una sucesión monótona creciente, probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es monótona creciente.
2. Calcule, justificando, $\lim(\frac{n^2-1}{n^2-n-2})^{\frac{n}{2}}$.
3. Estudie si la sucesión definida por $v_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ es convergente.

[21] Sea (u_n) definida por $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$.

1. Muestre que (u_n) es acotada.
2. Pruebe que (u_n) es convergente.
3. Calcule su límite.

[22] Calcule el límite de las siguientes sucesiones.

1. $u_n = \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$ con $0 < a \leq b$. Distinga los casos $a = b$, $a < b$ y $a > b$.
2. (i) $u_n = (1-\frac{1}{n-2})^{n+4}$ (ii) $u_n = \frac{n-\operatorname{sen}(n)}{n^2-16}$.

[23] Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia
$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ y $b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}$ con $a_0 > b_0 > 0$.

1. Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) también lo es.
2. Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que ambas convergen.
3. Calcule los límites de ambas sucesiones.

Indicación: Para probar que (a_n) es decreciente muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

[24] 1. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones, estudiando sus puntos de acumulación.

(i) $(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n}$ (ii) $\cos(\frac{n\pi}{2})$ (iii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$.

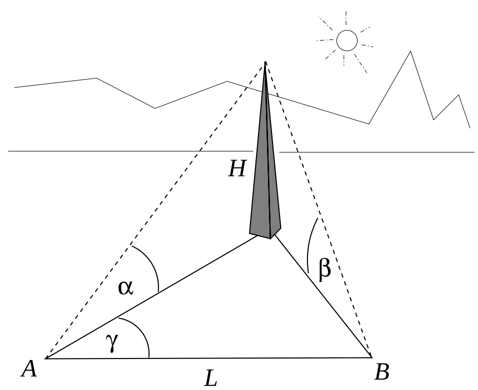
2. Sea (u_n) creciente y a un punto de acumulación. Pruebe que (u_n) es convergente y que $\lim u_n = a$.

Indicación: Muestre que a es cota superior de (u_n).

[25] Considerar la sucesión (u_n) dada por $u_n = \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha) + \cdots + \operatorname{sen}(n\alpha)$, donde $\alpha \neq 2k\pi$.

1. Probar que $u_n \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\alpha}{2}) - \cos(n\alpha + \frac{\alpha}{2}))$.
2. Probar que $\lim \frac{u_1+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(\frac{\alpha}{2})$.

[26] 1. La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$. (Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).



2. Resuelva la ecuación: $\cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.

[27] Estudie completamente la función

$$f(x) = |\sqrt{|x|} - x|.$$

Para ello:

1. Encuentre dominio, ceros. Estudie epiyectividad, inyectividad. Demuestre que su recorrido es el conjunto $\{y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.
2. Analice el crecimiento de la función **sin módulo** $\sqrt{|x|} - x$ para $x > 1/4$, $0 < x < 1/4$ y $x < 0$. Indicación: note que si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$.
3. Estudie el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ analizando los signos de $\sqrt{|x|} - x$.
4. Haga un gráfico aproximado de f que resuma el análisis precedente.

[28] Para $a > 0$, definimos la sucesión $s_n = \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a}}$, $n \in \mathbb{N}$. (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \Leftrightarrow a = r^{n^2}$).

(i) Si $0 < a < 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
<u>Indicación:</u> defina la sucesión $h_n = s_n - 1$ y muestre que $h_n \to 0$ utilizando que $(1+h)^k \geq 1 + kh$, $\forall h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y un teorema de comparación (sandwich).

1. Si $a > 1$ o $a = 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

2. Si $a_n \to L > 0$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a_n}} = 1.$$

3. Si $a > b > 0$ calcule:

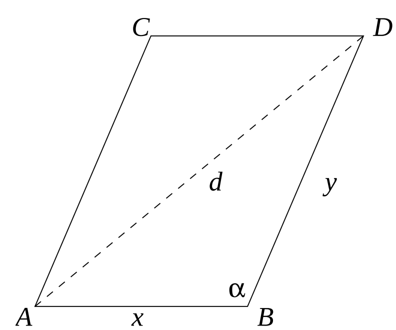
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}.$$

3. Autoevaluación: Control # 2 año 2003

Recomendaciones:

- Una vez su estudio avanzado, resuelva el control del año pasado que a continuación se presenta (3 horas) y autoevalúese.
- Sea autocrítico y aprenda de sus aciertos y errores.
- Racionalice el tiempo por preguntas (esto lo puede hacer en el momento que se lee el enunciado al comienzo del control).
- No se quede estancado exageradamente en una pregunta.
- Evite errores tipo signos, omisiones, factores, etc. revisando y preguntándose si el resultado y método son razonables.
- Lea cuidadosamente los enunciados y subraye las acciones que se piden, pensando en los objetivos que se quieren evaluar.
- El proceso de evaluación es complejo y ud. debe demostrar *en el papel* lo que ha aprendido, esto es, sepa que ud. es parte importante para que la medición de sus avances, esfuerzos y aptitudes se haga correctamente.
- Otras pautas similares de años anteriores las puede encontrar en
  `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`

P1.- **(a)** El paralelógramo $ABCD$ de la figura tiene perímetro $2p$ y su diagonal AD mide d con ángulo opuesto α ($0 < \alpha < \pi$ y $p > d$).



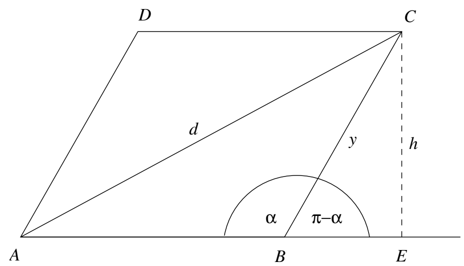
(i) (0.5pto) Si x e y son las longitudes de los trazos AB y BD, establezca que la superficie S del paralelógramo está dada por $S = xy\sin(\alpha)$.

(ii) (1.5pto) Demuestre que $S = \dfrac{p^2 - d^2}{2} \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
Observación: si usa una identidad trigonométrica no evidente, demuéstrela.

(iii) (1pto) Suponiendo que $x = y$, calcule S en función de p y d solamente.

(b) Resuelva en $\mathbb{R}$ las ecuaciones trigonométricas $\sqrt{2}\cos(x) = a$ para $a \in \mathbb{Z}$ (2pto). Usando lo anterior, encuentre el gráfico de la función $f(x) = [\sqrt{2}\cos(x)]$(= parte entera de $\sqrt{2}\cos(x)$) (1pto).

Pauta.- **(ai)** La superficie es $S = h \cdot x$ donde $h = EC$, $EC \perp AE$ (ver figura). Pero $h/y = \sin(\pi - \alpha)$ de donde $h = y\sin(\pi - \alpha) = y\sin\alpha$ (visto en clases). Luego $S = xy\sin\alpha$.



(aii) Por un lado el perímetro es $2(x+y)$, es decir

$$2p = 2(x+y) \Rightarrow p = x+y \tag{1}$$

y por el teorema del coseno

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha. \tag{2}$$

Elevando la expresión (1) al cuadrado se obtiene $p^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ y restando de (2) se encuentra

$$p^2 - d^2 = 2xy + 2xy\cos(\alpha) = 2xy(1+\cos\alpha).$$

Luego $xy = \dfrac{p^2-d^2}{2(1+\cos\alpha)}$. Reemplazando en la fórmula para S tenemos

$$S = \frac{p^2-d^2}{2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{3}$$

Comprobemos que $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan(\alpha/2)$ (esta es la identidad no trivial a la que se refiere en el enunciado):

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} &= \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{1+\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)} \\
&= \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)} \\
&= \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} \\
&= \tan(\alpha/2).
\end{aligned}$$

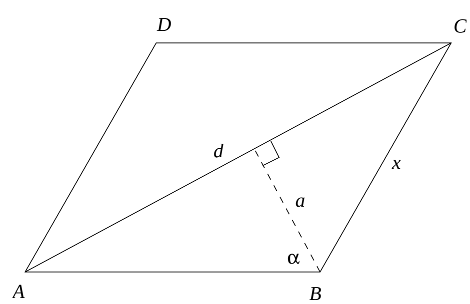
Por lo tanto $S = \dfrac{p^2-d^2}{2}\tan(\alpha/2)$.

Nota: como $\alpha \in (0,\pi)$ $\cos(\alpha/2) \neq 0$.

(aiii) Suponemos $x = y$

Opción 1 Por el Teorema de Pitágoras $a^2 = x^2 - (d/2)^2$, donde a es la longitud de la altura en línea punteada (ver figura), pero $x = p/2$ de donde

$$a = \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2-d^2}.$$



El área del triángulo ABC es
$$\frac{1}{2}d\cdot a=\frac{1}{4}d\sqrt{p^2-d^2}$$
y por lo tanto el área del paralelógramo es
$$S=\frac{1}{2}d\sqrt{p^2-d^2}.$$

Opción 2 Usando la fórmula (3) de la parte **(ii)**, debemos encontrar $\cos\alpha$ y $\sin\alpha$ en función de p y de d. Por el Teorema del coseno
$$d^2=2x^2-2x^2\cos\alpha\Rightarrow\frac{d^2}{2x^2}=1-\cos\alpha$$
pero $x=p/2$ de donde
$$1-\cos\alpha=\frac{2d^2}{p^2}\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{2d^2}{p^2}.$$
Ahora necesitamos
$$\begin{aligned}1+\cos\alpha &= 2\left(1-\frac{d^2}{p^2}\right)\\ \sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ &= \sqrt{1-\left(1-\frac{2d^2}{p^2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{4d^2}{p^2}-\frac{4d^4}{p^4}}\\ &= 2\frac{d}{p}\sqrt{1-\frac{d^2}{p^2}}.\end{aligned}$$
Luego
$$\begin{aligned}S &= \frac{p^2-d^2}{2}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ &= \frac{p^2-d^2}{2}\frac{2\frac{d}{p}\sqrt{1-\frac{d^2}{p^2}}}{2\left(1-\frac{d^2}{p^2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}(p^2-d^2)\frac{dp\sqrt{1-\frac{d^2}{p^2}}}{p^2-d^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2-d^2}.\end{aligned}$$

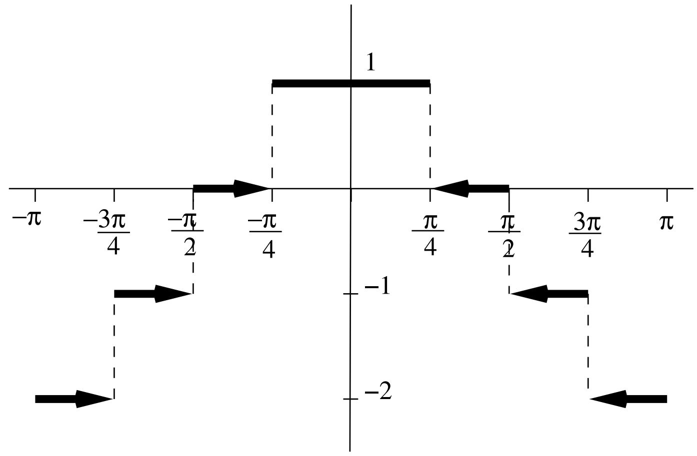
(b) Sea $a\in\mathbb{Z}$ y resolvamos $\sqrt{2}\cos x=a$. Si $a\geq 2$ entonces $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1$ por lo que no hay solución.
Similarmente, si $a\leq -2$ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}<-1$ y tampoco hay solución.
Caso $a=0$: $\sqrt{2}\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
Caso $a=1$: $\sqrt{2}\cos x=1$ esto es $\cos x=1/\sqrt{2}$. Una solución es $x=\pi/4$ y por simetría otra es $x=-\pi/4$, también son soluciones por periodicidad $x=\pi/4+2k\pi$ o $x=-\pi/4+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Caso $a = -1$: $\sqrt{2}\cos x = -1$ esto es $\cos x = -1/\sqrt{2}$ cuya solución es $x = 5\pi/4 + 2k\pi$ o $x = 3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gráfico: f es periódica de periodo 2π:

$$f(2\pi + x) = [\sqrt{2}\cos(2\pi + x)] = [\sqrt{2}\cos(x)] = f(x),$$

luego basta bosquejar f en $[-\pi, \pi]$ o en $[0, 2\pi]$.



Puntuación:

$$\textbf{(ai)}\ [\mathbf{0.5pto}]\left\{\begin{array}{cl} h/y = \sin(\pi-\alpha) & [\mathbf{0.2pto}] \\ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha & [\mathbf{0.2pto}] \\ \text{resto} & [\mathbf{0.1pto}] \end{array}\right.$$

$$\textbf{(aii)}\ [\mathbf{1.5pto}]\left\{\begin{array}{cl} \text{teo del coseno} & [\mathbf{0.3pto}] \\ \text{llegar a (3)} & [\mathbf{0.6pto}] \\ \text{identidad} & [\mathbf{0.6pto}] \end{array}\right.$$

(aiii) [**1pto**]

$$\text{Opción 1}\left\{\begin{array}{cl} \text{encontrar } a & [\mathbf{0.5pto}] \\ S = \ldots & [\mathbf{0.5pto}] \end{array}\right. \quad \text{Opción 2}\left\{\begin{array}{cl} \text{despejar } \cos\alpha & [\mathbf{0.5pto}] \\ \text{resto} & [\mathbf{0.5pto}] \end{array}\right.$$

(b) $\sqrt{2}\cos\alpha$, $a \in \mathbb{Z}$ [**2pto**]

$a \geq 2$, $a \leq -2$ no hay solución	[**0.5pto**]
caso $a = 0$	[**0.5pto**]
caso $a = 1$	[**0.5pto**] ([**0.5pto**] por una solución)
caso $a = -1$	[**0.5pto**] ([**0.5pto**] por una solución)

$$\text{Gráfico } [\mathbf{1pto}]\left\{\begin{array}{l} \text{conocimiento de } \cos x \\ \text{importancia de las soluciones de } \cos x = a,\ a \in \mathbb{Z} \\ [y] = \text{mayor entero que es } \leq y \end{array}\right.$$

Comentarios: En **(b)**: $\sqrt{2}\cos\alpha$, $a \in \mathbb{Z}$ basta que digan cuáles son las soluciones (una línea sin justificar). En **(b)**: gráfico de f. Si hay bosquejo y es correcto dar todo el puntaje. Si el bosquejo es básicamente correcto (por ejemplo si no le queda claro qué pasa en los extremos de los intervalos donde f es constante) [**0.8pto**]. Si los puntos de salto no son correctos, pero consistentes con las soluciones que obtuvo de $\sqrt{2}\cos\alpha$, $a \in \mathbb{Z}$ dar [**1pto**].

P2.- **(a)** Calcule los siguientes límites:

(i) (0.75pto) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-1}{n}\right] \qquad \left(\left[\dfrac{n-1}{n}\right] = \text{ parte entera de } \dfrac{n-1}{n}\right)$

(ii) (0.75pto) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!+1}$.

(b) Considere la sucesión $s_n = \dfrac{2^n+1}{n^2\, 3^{n+1}}$.

(i) (0.75ptos) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

(ii) (0.75ptos) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}$.

(c) Sea $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Se define la sucesión (u_n) por

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \quad \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

(i) (1pto) Encuentre el máximo de la función $g(x) = 2(x - x^2)$ y a partir de esto demuestre que $\forall n \geq 0$, $u_n \in (0, \frac{1}{2})$.

(ii) (1pto) Pruebe que (u_n) es monótona.

(iii) (1pto) Explique por qué (u_n) es convergente. Calcule su límite. Justifique claramente su respuesta.

Pauta.- (ai) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-1}{n}\right]$. Para $n \geq 1$ $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$ de donde $\left[\frac{n-1}{n}\right] = 0$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n}\right] = 0.$$

(aii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!+1}$. **Primera forma:** escribirlo como el producto de una sucesión que converge a cero (sucesión nula) por una acotada (en este caso incluso convergente):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!+1} = 0$$

Segunda forma: reescribir el límite como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{(n+1)!}}$$

y por álgebra de sucesiones el límite es nulo. **Tercera forma:** teorema de comparación o "sandwich" considerando que

$$0 \leq \frac{n!}{(n+1)!+1} \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

(bi) Si $s_n = \dfrac{2^n+1}{n^2\, 3^{n+1}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(2/3)^n + (1/3)^n}{3} = 0$$

recordando que $q^n \to 0$ si $|q| < 1$ y además $\dfrac{1}{n^2} \to 0$.

(bii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n^2\,3^{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \qquad (4) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \\
&= \frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

pues $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$ y por lo tanto $\sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \to 1$ (visto en clase). Los límites de los dos primeros factores en (4) se vieron en clases y valen 1. De (4) se puede también obtener directamente el límite 2/3 final si se usa la propiedad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\} \quad \text{para } a, b > 0.$$

(ci) $u_0 = \alpha \in (0, 1/2)$, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.
$g(x) = 2(x - x^2)$. El gráfico de g es una parábola invertida:

$$g(x) = 2(-(x - 1/2)^2 + 1/4) = -2(x - 1/2)^2 + 1/2.$$

Luego el máximo de g es $1/2$ (el vértice es $(1/2, 1/2)$). Veamos por inducción que $u_n \in (0, 1/2)$. Si $n = 0$ es una hipótesis, si suponemos que es cierto para n, entonces $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ pero $1 - u_n > 1/2$, $u_n > 0$, luego $u_{n+1} > 0$. Además del análisis de g es claro que $u_{n+1} = g(u_n) < 1/2$ pues $u_n \neq 1/2$.

(cii) Veamos que u_n es creciente:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} \geq u_n &\Leftrightarrow 2u_n(1 - u_n) \geq u_n \\
&\Leftrightarrow 2(1 - u_n) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - u_n \geq 1/2 \\
&\Leftrightarrow 1/2 \geq u_n
\end{aligned}
$$

lo que es cierto.

(ciii) Como u_n es monótona y acotada, converge: $u_n \to u$. Además u_n es creciente, luego $u = \sup\{u_n,\ n \geq 0\} \geq \alpha > 0$. De la definición de u_n deducimos por álgebra de límites y subsucesiones que

$$u = 2u(1 - u)$$

y como $u > 0$ despejando se obtiene $u = 1/2$.

Puntuación:

(ai) [**0.75pto**]

(aii) [**0.75pto**]

(bi) [**0.75pto**]

(bii) [**0.75pto**]

$$\textbf{(ci)}\ [\textbf{1pto}]\begin{cases} \text{encontrar máximo de } g & [\textbf{0.4pto}] \\ \text{probar que } u_n > 0 & [\textbf{0.2pto}] \\ \text{probar que } u_n < 1/2 & [\textbf{0.4pto}] \end{cases}$$

(cii) [**1pto**]

$$\textbf{(ciii)}\ [\textbf{1pto}]\begin{cases} \text{monótona acotada} & [\textbf{0.3pto}] \\ \text{ecuación límite de } u_n & [\textbf{0.4pto}] \\ u_n \neq 0 \text{ y por lo tanto } u = 1/2 & [\textbf{0.3pto}] \end{cases}$$

P3.-

Pauta.- **(i)** Probemos que $(f(a_n))$ es decreciente. En efecto, como $a_{n+1} \leq a_n$ porque a_n es decreciente entonces $f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$ pues f es creciente.

Veamos que $(f(a_n))$ es acotada inferiormente. Como a_n es acotada inferiormente $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (m es cota inferior) luego $f(a_n) \geq f(m)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $f(m)$ es cota inferior de $(f(a_n))$.

Por el Teorema de sucesiones monótonas y acotadas se deduce que $(f(a_n))$ es convergente.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to \ell$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \to |a_n - \ell| < \varepsilon/2.$$

De la definición de $|a_n - b_n| \to 0$ también se desprende que $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \to |a_n - b_n| < \varepsilon/2.$$

Definamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces

$$n \geq n_0 \to \begin{cases} |a_n - \ell| < \varepsilon/2 \\ |a_n - b_n| < \varepsilon/2. \end{cases}$$

Por lo tanto, para $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |b_n - \ell| &= |b_n - a_n + a_n - \ell| \\ &\leq |b_n - a_n| + |a_n - \ell| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $s_n \to \ell$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $|s_n - \ell| < \varepsilon/2$. Sea $n \geq n_0$, con lo cual $n+1 \geq n_0$ también; se tiene entonces que $\forall n \geq n_0$

$$|s_n - \ell| < \varepsilon/2, \quad |s_{n+1} - \ell| < \varepsilon/2.$$

Luego, si $n \geq n_0$ se tiene

$$\begin{aligned} |s_n + s_{n+1} - 2\ell| &= |s_n - \ell + s_{n+1} - \ell| \\ &\leq |s_n - \ell| + |s_{n+1} - \ell| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Puntuación:

$$
\textbf{(i)}\ [\textbf{2pto}]\left\{\begin{array}{cl}
(f(a_n))\text{ decreciente} & [\mathbf{0.8pto}]\\
(f(a_n))\text{ acotada inferiormente} & [\mathbf{0.8pto}]\\
\text{teorema de suc. monótonas y acotadas} & [\mathbf{0.4pto}]
\end{array}\right.
$$

$$
\textbf{(ii)}\ [\textbf{2pto}]\left\{\begin{array}{cl}
\text{planteamiento: ``sea } \varepsilon > 0\ldots\text{''} & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{uso correcto de la definición } a_n \to \ell \text{ y } |a_n - b_n| \to 0 & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{encontrar } n_0 & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{uso de la desigualdad triangular y conclusión} & [\mathbf{0.5pto}]
\end{array}\right.
$$

$$
\textbf{(iii)}\ [\textbf{2pto}]\left\{\begin{array}{cl}
\text{planteamiento} & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{usar } s_n \to \ell & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{darse cuenta que el mismo } n_0 \text{ sirve} & [\mathbf{0.5pto}]\\
\text{desigualdad triangular y conclusión} & [\mathbf{0.5pto}]
\end{array}\right.
$$

Comentario: puede haber variantes correctas en la definición que se usa de convergencia: $\forall n > n_0$ en vez de $\forall n \geq n_0$ o $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ en vez de $|a_n - \ell| < \varepsilon$, o 2ε en vez de ϵ, etc.

4. Problemas resueltos

P1.- Estudiar $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{|x|+2}{|x|-2}}$, determinando dominio, paridad, signos, raíces, crecimiento y recorrido. Además bosqueje un gráfico de f.

Solución.-

- Dominio: $f(x)$ está definida cuando
$$\frac{|x|+2}{|x|-2} \geq 0$$
y esto último se tiene para $|x| > 2$. Luego $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

- Paridad: f es una función par, en efecto,
$$f(-x) = 2 - \sqrt{\frac{|-x|+2}{|-x|-2}} = 2 - \sqrt{\frac{|x|+2}{|x|-2}} = f(x)$$

- Signos: para $x \in Dom(f)$, $f(x) \geq 0$ si y sólo si
$$\begin{aligned}
0 \leq 2 - \sqrt{\frac{|x|+2}{|x|-2}} \Leftrightarrow\ & 2 \geq \sqrt{\frac{|x|+2}{|x|-2}}\\
\Rightarrow\ & 4 \geq \frac{|x|+2}{|x|-2}\\
\Rightarrow\ & 4(|x|-2) \geq |x|+2
\end{aligned}$$
y esto se cumple si y sólo si $|x| \geq \frac{10}{3}$. Por lo tanto $f(x) \geq 0$ para $x \in (-\infty, -\frac{10}{3}] \cup [\frac{10}{3}, \infty)$. Análogamente $f(x) \leq 0$ para $x \in [-\frac{10}{3}, -2) \cup (2, \frac{10}{3}]$.

- Raíces: del desarrollo anterior se deduce que $f(x) = 0$ para $x \in \{-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\}$.

- Crecimiento: Sean $x, y \in Dom(f)$. Como f es una función par, basta analizar el caso en que $x, y > 0$. Previo, notemos que
$$\frac{|x|+2}{|x|-2} = 1 + \frac{4}{|x|-2}.$$

Para $0 < x \leq y$, $x, y \in Dom(f)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& |x| - 2 \leq |y| - 2 \\
\Leftrightarrow \ & \frac{4}{|x|-2} \geq \frac{4}{|y|-2} \\
\Leftrightarrow \ & 1 + \frac{4}{|x|-2} \geq 1 + \frac{4}{|y|-2} \\
\Rightarrow \ & \sqrt{1 - \frac{4}{|x|-2}} \geq \sqrt{1 - \frac{4}{|y|-2}} \\
\Rightarrow \ & 2 - \sqrt{1 - \frac{4}{|x|-2}} \leq 2 - \sqrt{1 - \frac{4}{|y|-2}}
\end{aligned}$$

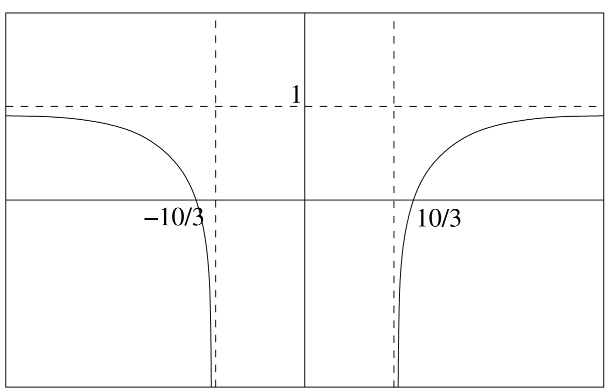
esto es $f(x) \leq f(y)$ para $0 < x \leq y$, luego f es creciente en el intervalo$(2, \infty)$. Análogamente se tiene, dada la paridad de f, que es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.

- Recorrido: es fácil verificar que $f(x) \leq 1 \ \forall x \in Dom(f)$, en efecto, para $x > 2$

$$\begin{aligned}
1 &\leq \sqrt{1 + \frac{4}{x-2}} \\
-1 &\geq -\sqrt{1 + \frac{4}{x-2}} \\
1 &\geq 2 - \sqrt{1 + \frac{4}{x-2}}.
\end{aligned}$$

Luego f está acotada superiormente por 1. Notamos que si tomamos $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ se cumple que $f(x_n) \to -\infty$, notamos además, que si consideramos la sucesión $x_n = 2+n$ se cumple que $f(x_n) \to 1$. Del desarrollo anterior, utilizando la monotonía de f, se deduce que $rec(f) = (-\infty, 1)$.
Observación: dada la paridad de f no hemos analizado el caso $x < -2$

- Gráfico:



Observación: el análisis anterior será más detallado cuando estudiemos continuidad y derivadas.

P2.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no identicamente nula, tal que para todo x, y en $\mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Probar que $f(0) = 0$ y que $f(1) = 1$.

2. Calcular $f(x)$ para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y por último para $x \in \mathbb{Q}$.

3. Probar que $x \geq 0$ implica que $f(x) \geq 0$. Deducir que f es monótona creciente.

4. Probar que $f(x) = \sup\{f(r) : r \leq x, r \in \mathbb{Q}\}$ y que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.-

1. Es claro que $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ luego restando $f(0)$ a ambos lados de la ecuación se consigue $f(0) = 0$.
   Notemos que $f(1) \neq 0$, en efecto, si $f(1) = 0$ entonces
   $$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(1x) = f(1)f(x) = 0$$
   lo cual contradice el hecho que f no es idénticamente nula. De lo anterior se sigue que $f(1) = f(1)f(1)$ y por lo tanto, dividiendo por $f(1)$ se obtiene que $f(1) = 1$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ es fácil ver que $f(n+1) = 1 + f(n)$, utilizando un razonamiento inductivo se sigue que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que
   $$0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$
   por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$. De esta observación se concluye inmediatamente que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$.
   Sea $q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, calculemos $f(\frac{1}{q})$. Notemos que
   $$1 = f(\frac{q}{q}) = f(q)f(\frac{1}{q})$$
   luego $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Consideremos ahora $r \in \mathbb{Q}$ entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$ tal que $r = \frac{p}{q}$
   $$f(r) = f(p)f(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}$$
   luego $f(r) = r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

3. Sea $x \geq 0$, es claro que $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$ y por lo tanto $f(x) \geq 0$. De esto último se deduce fácilmente que f es monótona creciente. En efecto, consideremos $x \leq y$ de lo anterior $f(y - x) \geq 0$, pues $y - x > 0$, por lo tanto, utilizando que $f(-x) = -f(x)$, se concluye que $f(y) - f(x) \geq 0$ en conclusión $f(x) \leq f(y)$.

4. Dado $x \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto
   $$A = \{f(r) \mid r < x \quad r \in \mathbb{Q}\}$$
   Notemos que, de la monotonía de f, se cumple que $f(x)$ es cota superior de A. Además,
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ t.q.} f(x) - \varepsilon \leq f(r).$$
   En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como $f(x) - \varepsilon < f(x)$ se tiene que por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) - \varepsilon \leq r \leq f(x)$, por lo tanto, dado que $f(r) = r$ se obtiene la propiedad (note que $r < x$ ¿por que?), luego $f(x) = \sup(A)$. Para finalizar basta notar que
   $$A = \{r \mid r < x \quad r \in \mathbb{Q}\}$$
   luego $\sup(A) = x$. Concluimos que $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, esto es f es la identidad.

P3.- Un montañista está en la cima de un cerro y observa una cabaña C_1 con un ángulo α y otra cabaña C_2 con un ángulo $\alpha+\beta$. Su mapa indica que la cabaña está a una distancia d_1 del punto P donde termina la ladera y comienza la falda del cerro y que las cabañas están separadas por una distancia d_2.

1. Demuestre que la distancia l desde la cima a P es

$$l = \frac{d_1(d_1+d_2)\operatorname{sen}(\beta)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2\operatorname{sen}^2(\beta)+d_2^2\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)-2(d_1+d_2)d_2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}}$$

2. Pruebe que cuando $\alpha=\beta$ y $d_1=d_2$ el ángulo γ es $\frac{\pi}{2}$.

Solución.- La solución de este problema la puede encontrar en la pauta del control 2, año 1996, la cual puede ser obtenida de la dirección `www.dim.uchile.cl/~lmella/publicacion`.

P4.- Definamos la sucesión de números reales (u_n) mediante la recurrencia $u_0=1$ y $u_{n+1}=u_n+\frac{2-u_n}{1+2u_n}$.

1. Probar que para todo $0\le u\le 2$ se tiene $0\le u+\frac{2-u}{1+2u}\le 2$.
2. Deducir que (u_n) es acotada.
3. Probar que (u_n) es no-decreciente.
4. Deducir que (u_n) es convergente y calcular su límite.

Solución.-

1. Es directo ver que si $0\le u\le 2$ entonces $u+\frac{2-u}{1+2u}\ge 0$. Por otra parte para $0\le u\le 2$ se cumple que $0\le 2u$, luego $1\le 1+2u$ y por lo tanto

$$\frac{1}{1+2u}\le 1.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $2-u\ge 0$ vemos que

$$\frac{2-u}{1+2u}\le 2-u$$
$$u+\frac{2-u}{1+2u}\le 2$$

2. Como $u_0=1$ utilizando la parte anterior y un razonamiento inductivo se concluye que $0\le u_n\le 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y por lo tanto u_n está acotada.

3. Calculemos la diferencia $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2-u_n}{1+2u_n}\ge 0$$

pues $u_n\le 2$, luego u_n es creciente.

4. Como u_n es creciente y acotada superiormente entonces es convergente. Sea l el límite de u_n. Tomando límite a la expresión

$$u_{n+1}=u_n+\frac{2-u_n}{1+2u_n}$$

se obtiene

$$l=l+\frac{2-l}{1+2l}$$

y por lo tanto $l = 2$.

Observación: El paso anterior está justificado por el álgebra de límites y los teoremas de convergencia. En efecto, como u_{n+1} es una subsucesión de una sucesión convergente, necesariamente debe converger al mismo límite l. Por otra parte por álgebra de límites se tiene que el límite de una suma es la suma de los límites, análogamente para la división. Esta estrategia nos permitirá en muchos casos encontrar una ecuación para l, la cual puede poseer múltiples soluciones. La verdadera solución de la recurrencia dependerá de las características de la sucesión asociada, por ejemplo, si s_n es una sucesión de términos positivos es natural exigir que l (el límite de s_n) sea mayor o igual que cero.

P5.- Calcular los siguientes límites (si existen).

(i) $\lim(\frac{3n-1}{2n+1})^n$ (ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$ (iii) $\lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)$ (iv) $\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(1+k)}$

(v) $\lim n \operatorname{sen}(\frac{a}{n})$ (vi) $\lim n(1-\cos(\frac{a}{n}))$ (vii) $\lim n^2(1-\cos(\frac{a}{n}))$

Solución.-

(i) $\lim(\frac{3n-1}{2n+1})^n$. Notemos que

$$\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{1}{2n}}\right),$$

luego

$$\lim\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(1-\frac{1}{3n})^n}{(1+\frac{1}{2n})^n},$$

sabemos que $(1-\frac{1}{3n})^n \to e^{-1/3}$ y $(1+\frac{1}{2n})^n \to e^{1/2}$, como $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ diverge se tiene que el límite en cuestión diverge.

(ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$. Factorizando por $\frac{1}{n^2}$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}$$

por otra parte se tiene que

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}} \le \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

por lo tanto

$$0 \le \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2}$$

luego $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = 0$.

(iii) $\lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)$. Es directo verificar que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) &= \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1) = \lim n\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

(iv) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Notemos que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

por lo tanto $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(v) $\lim n \operatorname{sen}(\frac{a}{n})$. Para $a = 0$ se tiene que $\lim n \operatorname{sen}(\frac{a}{n}) = 0$. Si $a \neq 0$ se cumple que

$$\lim n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right) = \lim a \frac{\operatorname{sen}(\frac{a}{n})}{\frac{a}{n}}$$

y como $\lim \frac{\operatorname{sen}(\frac{a}{n})}{\frac{a}{n}} = 1$ se tiene que

$$\lim n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right) = a.$$

(vi) $\lim n(1 - \cos(\frac{a}{n}))$. Nuevamente si $a = 0$ el resultado es directo. Para $a \neq 0$ recordemos la fórmula

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

tomando $\varphi = \frac{a}{2n}$ se obtiene

$$\lim n\left(1 - \cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) = \lim n\left(2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2n}\right)\right).$$

dado que $\operatorname{sen}(\frac{a}{2n}) \to 0$ y del ejercicio anterior se tiene que $n \operatorname{sen}(\frac{a}{n}) \to a$, se cumple entonces que

$$\lim n\left(1 - \cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) = 0$$

(vii) $\lim n^2(1 - \cos(\frac{a}{n}))$. Para $a = 0$ el resultado es directo. Si $a \neq 0$ se cumple, utilizando la fórmula del ángulo doble, que

$$\lim n^2\left(1 - \cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) = \lim n^2\left(2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2n}\right)\right) = \frac{1}{2} \lim \left(2n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)\right)\left(2n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)\right)$$

y ya que sabemos que $n \operatorname{sen}(\frac{a}{n}) \to a$ se concluye que

$$\lim n^2\left(1 - \cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) = \frac{a^2}{2}$$