U. DE CHILE

INGENIERIA

# Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
# CALCULO MA–12A
# Guía de Problemas No. 1, 2004

disponible en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`

**Números Reales y Geometría Analítica**

## Índice



## 1. Ejercicios.

### Números Reales

[1] Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

- Desarrollando de dos modos $((-1)+1)\cdot a$ se puede deducir de los axiomas que $(-1)\cdot a = -a$.
- En un cuerpo puede darse que $1+1=0$.
- Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$.
- Para todo real $x$ y todo natural $n$ se cumple que (i) $x^n \cdot x^n = x^{n^2}$ (ii) $x^n \cdot x^{-n} = 0$
- Para todo par de reales $x, y$ es cierto que si $x \leq y$ entonces $x^n \leq y^n$.
- Es cierto que (i) $1 \in ]1,2]$ (ii) $\forall x \in [2,\infty[, \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $M > x$ (iii) $\frac{x+y}{2} \in ]x,y[$.
- Como $|x+y| \leq |x| + |y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $||x+y| + |x-y|| \leq |x+y| + |x-y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Para todo real $x$, (i) $|x| > 0$ (ii) $|x-y| \leq |x| + |y|$ (iii) $||x| - |y|| \leq |x| - |y|$.
- El conjunto solución de la siguiente inecuación es vacío: $|||x+1|-1|+1| > 0$.
- Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo y máximo.
- Todo intervalo abierto posee ínfimo.
- 1 es el ínfimo de (i) $[1,\infty[$ (ii) $]1,\infty[$ (iii)$\{x \in \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ x + \varepsilon > 1\}$
- -1 es el máximo de (i) $]-\infty, 1[$ (ii) $[-2,-1]$ (iii) $[-3,-1[\cup\{1\}$
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado inferiormente entonces $\sup(-A) = -\inf(A)$.
- Para cualquier par de reales $x$ e $y$ existe un racional $r$ y un irracional $i$ tales que $x < r < i < y$.

[2] Demuestre que para todo par de reales $x$ e $y$ se cumple:

1. (i) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ (ii) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
2. (i) $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$

[3] Demuestre las siguientes desigualdades:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, (i) $(1+x)^2 \geq 1+2x$ (ii) $x^2+y^2 \geq 2xy$ (iii) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
2. Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, $x \neq 0$ (i) $x^{-1} > 0$ (ii) $x + x^{-1} \geq 2$ (iii) $x^3 > 0$.
3. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ (i) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (ii) $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ (iii) $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$
4. Para todo $x, y, z > 0$, (i) $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$ (ii) Si $x+y=z=1$ entonces $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geq 8$ (iii) Si $xyz=1$ entonces $x+y+z \geq 3$.

[4] 1. Demuestre que: (i) $\text{mín}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ (ii) $\text{máx}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$
2. Calcule (i) $\text{máx}(x,y) + \text{mín}(x,y)$ (ii) $\text{máx}(x,y) - \text{mín}(x,y)$ (iii) $\text{máx}(x,y) \cdot \text{mín}(x,y)$.

[5] Resolver las siguientes inecuaciones:

1. (i) $5x-3 \geq 2x+1$ (ii) $\frac{2}{6x-5} < 0$ (iii) $(x-2)(x-3) \leq 0$.
2. (i) $\frac{x+2}{2x^2-3x} < 0$ (ii) $3x^2-x+5<0$ (iii) $\frac{4}{x}+\frac{x-1}{5} < \frac{3}{x}+1$.
3. (i) $|x-8| < x-2$ (ii) $|x^2-|3+2x|| < 4$ (iii) $|\frac{5x+3}{x-1}| \geq 7$.
4. Para $a>0$ (i) $ax-6 \geq 2ax+1$ (ii) $\frac{x+a}{x-a} > 0$ (iii) $(x+a)(x-a) < 0$.
5. (i) $\frac{(x-a)}{(x+1)(x-a)} > 0$ (ii) $|x-8| < x+4$ (iii) $x-|x+1| > 2$.

[6] Encuentre el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de las siguientes conjuntos:

1. (i) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ $\{x \in \mathbb{R} : |x-4| \geq 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} - 2 < 1\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : [x] < 2\}$.
2. (i) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \cdot n < 1\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+3x| < 4\}$.
3. (i) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$ (iii) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
4. (i) $\{x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} < 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R}_+ : x(2x-1) < |x|\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq x+1\}$.
5. (i) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \in [1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
6. (i) $\{x \in \mathbb{R} : [x] - x > 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{[x]} < 2\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : [x]x < -x\}$
7. (i) $\{x \in \mathbb{R} : [x]^2 + x = 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Z} : 2^x > 2\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

[7] Sean $S$ y $T$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que $S$ tiene supremo, que $T$ tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

[8] 1. Sea $A$ subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente y $c \geq 0$. Pruebe que el conjunto $cA = \{cx : x \in A\}$ es acotado superiormente y que $\sup(A) \cdot c = \sup(cA)$.
2. Sean $A$ y $B$ conjuntos de reales no negativos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que $AB$ es acotado superiormente y $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.
Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

[9] 1. Resolver la inecuación $\frac{|x+|x-1||-|x-2|}{(x+2)|x+1|} > 1$.
2. Muestre que $sup(\sqrt{A}) = \sqrt{sup(A)}$ donde $A \subset \mathbb{R}_+$ es no vacío y acotado superiormente y $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

[10] Demuestre que si $A$ y $B$ son acotados superiormente y no vacíos entonces también lo son $A \bigcup B$ y $A \bigcap B$.

**Geometría Analítica**

**.- Rectas y circunferencias**

[1] Pruebe analíticamente que:

1. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus tres vértices.
2. El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es igual en longitud a la mitad del tercer lado.
3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados es una recta.
4. las diagonales de un rectángulo son iguales en longitud.
5. La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro lados.
6. La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo, divide al lado opuesto en la razón que forman los otros dos lados.
7. Los puntos medios de un rectángulo son los vértices de un paralelógramo.
8. Las tres alturas de un triángulo se intersectan en un único punto.

[2] Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:

1. que pasa por $(3,2)$ y $(9,7)$.
2. que pasa por $(-1,0)$ y tiene pendiente $-8$.
3. que pasa por la intersección de las rectas $x=0$ e $y=-1$ y tiene pendiente 6.
4. que pasa por la intersección de las rectas $x-y=1$ y $x+y=0$ y el punto $(0,0)$.
5. que pasa por la intersección de las rectas $2x+y$ y $x=-2y$ y la intersección de las rectas $3x-6y=2$ y $4x+1=0$.

[3] Dado el punto $P$ de coordenadas $(a,b)$ y la recta $L$ de ecuación $y=mx$, determinar la ecuación de la recta que pasa por $P$ y tal que el trazo que sobre ella determinan los ejes, queda dimidiado por $L$.

[4] Dados el punto $P=(a,b)$ y la recta $L: y=mx$, se trazan $PH$ perpendicular a $OX$ y $PK$ perpendicular a $L$. Si $D$ es el punto medio de $OP$ y $M$ es el punto medio de $HK$ probar que $DM$ es perpendicular a $HK$ y $DK=DH$.

[5] Dos rectas variables $L_1$ y $L_2$ que pasan, respectivamente por dos puntos fijos $A$ y $B$ se cortan perpendicularmente en el punto $P$. Determinar el lugar geométrico de $P$.

[6] Considere un triángulo $ABC$ de vértices $A=(0,0)$, $B=(b,0)$ y $C=(c,d)$. La altura $h_C$ corta al lado opuesto en $D$ y la altura $h_A$ corta al lado $BC$ en $E$, siendo $F=h_C\bigcap h_A$. Sean $G=AC\bigcap DE$ y $M$ el punto medio del lado $AC$. Probar que $BG$ es perpendicular a $MF$.

**.- Parábolas, elipses e hipérbolas**

[1] Por el vértice de la parábola $y^2=4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en $P$ y $Q$ a la parábola. $PQ$ corta el eje de simetría de la parábola en $R$. Probar que el foco divide al trazo $OR$ en la razón 1:3.

[2] ¿Cuál es la excentricidad de una elipse en la que la distancia entre sus focos es la mitad de la distancia entre sus directrices?

[3] Demostrar que la suma de las recíprocas de los cuadrados de dos diámetros perpendiculares en una elipse es constante.

[4] Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a $(x_0, y_0)$ como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice solamente propiedades de parábolas para determinar el máximo.

[5] Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ demostrar que $AP = BP = a^2$, donde $P$ es un punto sobre la hipérbola y $A$ y $B$ son las intersecciones de un recta que pasa por $P$ paralela al eje $X$, con las asíntotas de la hipérbola.

[6] ¿Cuál es la excentricidad de una hipérbola en la que la distancia entre sus focos es el doble de la distancia entre sus directrices?

[7] Sea la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$. Demostrar que toda circunferencia con centro en la hipérbola y tangente al eje $OY$ corta en el eje $OX$ una cuerda de magnitud constante.

**.- Tangentes**

[1] Las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con el eje $x$ son los puntos $A$ y $A'$. Una tangente cualquiera a la circunferencia por el punto $P = (x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, de ella corta a las tangentes por $A$ y $A'$ en los puntos $Q$ y $R$ respectivamente. Probar que $OQ$ es perpendicular a $OR$.

[2] Desde el punto $T$ se trazan las tangentes $TP$ y $TQ$ a una circunferencia dada. Desde el extremo $A$ del diámetro paralelo a la cuerda de contacto $PQ$ se trazan las rectas $AP$ y $AQ$ que cortan a la recta $OT$ en los puntos $R$ y $S$. Demostrar que $ST = TR$.

[3] La recta $L$ tangente a la parábola $y^2 = 4px$ por $P = (x_0, y_0)$ corta al eje $OY$ en $B$, a la directriz en $C$ y a la recta vertical por el foco en $A$.

1. Demostrar que $AF = CF$
2. Demostrar que $FB$ es perpendicular a $L$.

**.- Lugares Geométricos**

[1] Dada la recta $L : y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera $P$ sobre $L$ y su simétrico $Q$ con respecto al origen. Las rectas $PA$ y $QB$ se cortan en un punto $M$. Determinar el lugar geométrico de $M$ cuando el punto $P$ se desplaza sobre $L$.

[2] Dado un triángulo de base $AB = C$ se pide determinar el lugar geométrico del vértice $C$ en los siguientes casos:

1. Si la altura $h_c$ es igual a la transversal de gravedad $t_b$.
2. Si la diferencia de los cuadrados de las tranversales de gravedad $t_a$ y $t_b$ es igual a la mitad del área del triángulo.

[3] Un punto $A$ cuya proyección sobre el eje $OY$ es $B$ se mueve sobre la parábola $y^2 = 4px$. Determinar el lugar geométrico de la intersección de las rectas $OA$ y $BF$, siendo $O$ el origen y $F$ el foco.

[4] Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una elipse paralelas a una dirección dada.

[5] Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto que se mueve sobre la circunferencia $C : x^2 + y^2 = r^2$. Sea $Q$ la proyección de $P$ sobre el eje $OX$ y sea $C_1$ la circunferencia con centro en $P$ y tangente al eje $OX$. Si la recta $L$ es la recta que pasa por la intersección de $C$ y $C_1$, determine el lugar geométrico de los puntos $T$ de intersección entre $L$ y $PQ$.

[6] Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de las secantes que pasan por el foco de una parábola.

[7] Determinar el lugar geométrico de los puntos $P$ tales que su distancia al eje $OY$ es igual a la mitad de la longitud del trazo tangente desde $P$ a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$.

## 2. Preguntas de controles de años anteriores.

### Números Reales

[1] 1. Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades: (i) $A\bigcup B=\mathbb{R}$ (ii) todo elemento de $A$ es menor que todo elemento de $B$. Demuestre que existe un real $\alpha$ que es simultáneamente cota superior de $A$ y cota inferior de $B$. Pruebe, además, que dicho número real $\alpha$ es único.

2. Definamos $A_n=\{x\in\mathbb{R}: -2\leq x\leq 2 \text{ y } \frac{nx^2-4}{|x|-2}\geq 1\}$. Encuentre $s_n=sup(A_n)$. Determine $s=inf\{s_n : n\in\mathbb{N}\}$.

[2] 1. Sean $a\in\mathbb{R}_+$, $r\in]0,1[$ y $n\in\mathbb{N}$. Demuestre que: $(a+r)^n\leq a^n+r\cdot(1+a)^n$.

2. Sean $x,y,z$ números reales tales que: $x^2+y^2+z^2\leq 1$. Además, sean $a,b,c,d,e$ y $f$ números reales menores o iguales que $M$ (fijo). Demuestre que: $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz\leq 3M$.

[3] 1. Probar que $\sqrt{5}$ es irracional.

2. Demostrar que para cualquier real $a\neq 0$ se cumple:
$(a^2-a^{-1})(a+a^{-1}+1)^{-1}=a-1$

3. Sean $a$ y $b$ reales positivos, demostrar que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

[4] 1. Resolver la inecuación $x>||x|+|x-1|+|x-2||+1$.

2. Sea $S=\{u\in\mathbb{R}: u<u^3\}$ y $T=\{v\in\mathbb{R}: v^6\leq v^5+6v^4\}$. Determinar máximos, mínimos, supremo e ínfimo de $S$ y $T$ cuando existan.

[5] 1. Encuentre los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales se cumple $\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)}<0$

2. Determine para que valores de $a$ la siguiente inecuación no tiene solución
$(x+2)(x-1)(x+2a)<(x+1)(x-2)(x+a)$.

[6] 1. Dados $x$ e $y$ reales, demuestre que si para cualquier $\varepsilon>0$ se cumple que $a\leq b+\varepsilon$ entonces $a\leq b$.

2. Sean $A,B$ y $C$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x\in A$ y todo $y\in B$ existe $z\in C$ tal que $x+y\leq z$ entonces $sup(A)+sup(B)\leq sup(C)$.

3. Demuestre que si $C=A+B$ entonces $sup(A)+sup(B)=sup(C)$.

[7] Sean $x,y\in\mathbb{R}_+$ tales que $x+y=1$. Demostrar que

1. $xy\leq\frac{1}{4}$
2. $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$
3. $(x+x^{-1})^2+(y+y^{-1})^2\geq\frac{25}{2}$
Indicación: Para todo $x,y\in\mathbb{R}$ $x^2+y^2\geq 2xy$.

[8] 1. Resuelva la siguiente inecuación: $2x+|x-5|\leq\frac{25}{x-5}$

2. Probar que $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}_+$.

[9] 1. Demostrar, utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales que:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\ x,y\neq 0\ (x+y)(x^{-1}y^{-1})=x^{-1}+y^{-1}$$

En cada paso diga cual o cuales axiomas o propiedades está utilizando.

2. Demuestre que
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0\ (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$$
Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

3. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:
$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1$$

[10] 1. Demostrar que el ínfimo del conjunto $(a, +\infty)$ es $a$.

2. Pruebe que dos reales $x$ e $y$ para los cuales se cumple que
$$\forall b \in \mathbb{R},\ b > 1 \text{ implica } x < b \cdot y,$$
satisfacen la relación $x \leq y$.

## Geometría Analítica

[1] Dada la parábola $y^2 = 4px$ cuyo foco es $F$ y un punto $P$ sobre el eje $OY$. Demostrar que la perpendicular a $FP$, en $P$, es tangente a la parábola. Determinar las coordenadas del punto de tangencia. Demostrar que $QF$ es perpendicular a $FT$, donde $Q$ es el punto de tangencia.

[2] Probar que toda circunferencia que tiene diámetro una cuerda focal $AB$ de una parábola dada, es tangente a la directriz de dicha parábola.

[3] La base de un triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0,0)$, $B = (b,0)$. El vértice $C$ está sobre la recta $y = c$, $b > 0$ y $c > 0$. Determinar el lugar geométrico correspondiente a la intersección de las tres alturas.

[4] Considere una circunferencia de radio $r$. Sea $AB$ un diámetro fijo de ella y $PQ$ una cuerda variable que se mantiene perpendicular a $AB$. Determine el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas que pasan por $AB$ y por $BQ$ respectivamente.

[5] 1. Demuestre que si dos circunferencias son tangentes en un punto $T$, este punto es colineal con los centros de ambas circunferencias. Considere sólo el caso en que ambos centros se encuentran en el eje $OX$.

2. Sean $AC$ y $BC$ arcos de radio $AB$ y centro $B$ y $A$ respectivamente. Dos semicircunferencias de radio $\frac{1}{4}(AB)$ tienen por diámetros $AO$ y $OB$, siendo $O$ el punto medio de $AB$. Se desea caracterizar la circunferencia $\gamma$, de centro $Q$, tangente a los cuatro arcos. Siendo $T_1$ el punto de tangencia entre $\gamma$ y $OB$. Pruebe que $Q$ está sobre la recta $AT_1$. Siendo $T_2$ el punto de tangencia entre $\gamma$ y $OB$ pruebe que $Q$ está sobre la recta $MT_2$, donde $M$ es el punto medio de $OB$. Suponga $A = (-1,0)$ y $B = (a,0)$. Encuentre el radio y el centro de la circunferencia $\gamma$.
Indicación: utilice la simetría del problema.

[6] Se consideran tres puntos $O, A, B$ situados sobre un recta y se contruyen dos semicircunferencias de diámetros $OA$ y $OB$, respectivamente. Desde el punto medio $M$ del trazo $AB$ se levanta la perpendicular, cortando a la circunferencia mayor en $R$ y luego se traza la tangente $MP$ a la circunferencia menor, siendo $P$ el punto de tangencia. Demuestre que $O, P$ y $R$ se encuentran sobre una misma recta.

[7] Determinar el lugar geométrico de los puntos $P$ de intersección de las tangentes trazadas por los extremos $A$ y $B$ de dos diámetros conjugados de una elipse.

Nota: Se llaman diámetros conjugados en una elipse a dos cuerdas que pasan por el centro y cuyas pendientes $m_1$ y $m_2$ satisfacen $m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

[8] Dada la parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ para $p > 0$ determine los puntos $P$ y $Q$ (P con coordenadas positivas) de ella, de modo que las tangentes a la parábola por estos puntos pasen por el origen. Calcule la distancia de $P$ a la tangente que pasa por $Q$.

Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ es $y\beta = 4p(\frac{x+\alpha}{2} - p)$.

[9] 1. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elipse en los puntos $P$ y $R$ (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo $PR$ y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

2. Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Una recta variable $L$ que pasa por el origen, intersecta a la circunferencia en los puntos $Q$ y $S$. Determinar, analíticamente, el lugar geométrico de la intersección de las tangentes a la circunferencia por los puntos $P$ y $Q$.

   Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$.

[10] Sea la hipérbola H de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = 1$ y un punto $P$ cualquiera de ella. Considere el triángulo formado al intersectar las asíntotas de H con la tangente a H que pasa por $P$. Demuestre que el área de ese triángulo es igual a $ab$.

## 3. Autoevaluación: Control #1 año precedente

**Recomendaciones:**

- Una vez su estudio avanzado, resuelva el control del año pasado que a continuación se presenta (3 horas) y autoevalúese.
- Sea autocrítico y aprenda de sus aciertos y errores.
- Racionalice el tiempo por preguntas (esto lo puede hacer en el momento que se lee el enunciado al comienzo del control).
- No se quede estancado exageradamente en una pregunta.
- Evite errores tipo signos, omisiones, factores, etc. revisando y preguntándose si el resultado y método son razonables.
- Lea cuidadosamente los enunciados y subraye las acciones que se piden, pensando en los objetivos que se quieren evaluar.
- El proceso de evaluación es complejo y ud. debe demostrar *en el papel* lo que ha aprendido, esto es, sepa que ud. es parte importante para que la medición de sus avances, esfuerzos y aptitudes se haga correctamente.
- Otras pautas similares de años anteriores las puede encontrar en

  `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`

**P1.-** **(i)** *(4 ptos.)* Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad, demuestre las siguientes dos propiedades:

- Para todo $x, y$ reales, $(-x) + (-y)$ es opuesto (inverso aditivo) de $x + y$.

- Si $a, b, c, d$ son reales que verifican la relacin $(ad) + \Big(-(cb)\Big) = 0$ entonces

$$\Big((a+b)d\Big) + \Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big) = 0.$$

Indicación: mencione en cada paso el axioma utilizado. Si utiliza abreviaciones para los axiomas, dé una lista de éstas al comienzo.

**(ii)** *(2 ptos.)* Usando la definicin de mdulo, determine todos los reales que satisfacen la igualdad $|x+2| = |x| + 2$.

**Pauta.-** **(i)** **(4 ptos.)**

- **(1.5 ptos.)** Se utilizan axiomas de la suma de números reales:

$$\begin{aligned}
\Big((-x)+(-y)\Big) + \Big(x+y\Big) &= \Bigg(\Big((-x)+(-y)\Big)+x\Bigg)+y && \text{(asociatividad)}\\
&= \Bigg((-x)+\Big((-y)+x\Big)\Bigg)+y && \text{(asociatividad)}\\
&= \Bigg((-x)+\Big(x+(-y)\Big)\Bigg)+y && \text{(conmutatividad)}\\
&= (-x)+\Bigg(\Big(x+(-y)\Big)+y\Bigg) && \text{(asociatividad)}\\
&= (-x)+\Bigg(x+\Big((-y)+y\Big)\Bigg) && \text{(asociatividad)}\\
&= \Big((-x)+x\Big)+\Big((-y)+y\Big) && \text{(asociatividad)}\\
&= 0+0 \quad \text{(inverso)}\\
&= 0 \quad \text{(neutro)}
\end{aligned}$$

En estricto rigor, esto prueba que $(-x)+(-y)$ es *un* opuesto de $x+y$ (**(0.4 ptos.)** buen uso asociatividad, **(0.4 ptos.)** buen uso conmutatividad, **(0.4 ptos.)** buen uso inverso, **(0.3 ptos.)** buen uso neutro, **(-0.1 pto.)** por cada paso de asociatividad omitido.
Notemos que en algunas secciones pueden aparecer pasos de conmutatividad adicionales dado que los axiomas se establecieron en un orden predeterminado de operación, por ejemplo $a+(-a)=0$ y no $(-a)+a=0$. Esto es pues correcto.
Si se quiere ir más lejos, por unicidad del opuesto se tiene:

$$(-x)+(-y) = -(x+y)$$

lo que podría utilizarse en la parte siguiente.

∘ **(2.5 ptos.)** Se utilizan axiomas de cuerpo de los números reales:

$$
\begin{aligned}
\Big((a+b)d\Big) \quad + \quad \Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big) &= \\
&= \Big((ad)+(bd)\Big)+\Big(-\Big((cb)+(db)\Big)\Big) \quad \text{(distributividad)}\\
&= \Big((ad)+(bd)\Big)+\Big(\Big(-(cb)\Big)+\Big(-(db)\Big)\Big) \quad \text{(parte (i))}\\
&= (ad)+\left((bd)+\Big(\Big(-(cb)\Big)+\Big(-(db)\Big)\Big)\right) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= (ad)+\left(\Big((bd)+\Big(-(cb)\Big)\Big)+\Big(-(db)\Big)\right) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= (ad)+\left(\Big(\Big(-(cb)\Big)+(bd)\Big)+\Big(-(db)\Big)\right) \quad \text{(conmutatividad +)}\\
&= (ad)+\left(\Big(-(cb)\Big)+\Big((bd)+\Big(-(db)\Big)\Big)\right) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= \left((ad)+\Big(-(cb)\Big)\right)+\left((bd)+\Big(-(db)\Big)\right) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= \left((ad)+\Big(-(cb)\Big)\right)+\left((bd)+\Big(-(bd)\Big)\right) \quad \text{(conmutatividad $\cdot$)}\\
&= \left((ad)+\Big(-(cb)\Big)\right)+0 \quad \text{(inverso +)}\\
&= 0+0 \quad \text{(hipótesis)}\\
&= 0 \quad \text{(neutro +)}
\end{aligned}
$$

Vale la misma nota que para la parte precedente sobre los pasos de conmutatividad. Puntaje: **(0.3 ptos.)** buen uso asociatividad, **(0.3 ptos.)** buen uso conmutatividad, **(0.3 ptos.)** buen uso inverso **(0.3 ptos.)** buen uso neutro, **(-0.1 pto.)** por cada paso de asociatividad omitido, **(0.3 ptos.)** buen uso distributividad, **(1 pto.)** buen uso de hipótesis y eventualmente parte (i) habiendo precisado que el inverso es único.
Otra forma de resolver es demostrar que

$$(a+b)d=(c+d)b$$

usando la hipótesis. En efecto

$$\begin{aligned}
(a+b)d &= (ad)+(bd) \quad \text{(distributividad)}\\
&= ((ad)+0)+(bd) \quad \text{(neutro +)}\\
&= ((ad)+((-(cb))+(cb)))+(bd) \quad \text{(inverso +)}\\
&= (((ad)+(-(cb)))+(cb))+(bd) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= ((ad)+(-(cb))+((cb)+(bd)) \quad \text{(asociatividad +)}\\
&= 0+((cb)+(bd)) \quad \text{(hipótesis)}\\
&= (cb)+(bd) \quad \text{(neutro)}\\
&= (cb)+(db) \quad \text{(conmutatividad $\cdot$)}\\
&= (c+d)b \quad \text{(distributividad)}
\end{aligned}$$

y entonces

$$\Big((a+b)d\Big)+\Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big)=\Big((c+d)b\Big)+\Big(-\Big((c+d)b\Big)\Big)=0$$

por inverso +. El puntaje es similar que en el método anterior, sólo que aquí no es necesario utilizar la parte (i) ni teoremas de unicidad.

**(ii)** **(2 ptos.)** Usando la definición de módulo, separamos en casos:

- Si $x \geq 0$ y $x \geq -2$ entonces $x+2=x+2$ lo que es cierto para todo $x$ real de modo que la intersección es $A_1=\{x\geq 0\}$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x<0$ y $x\geq -2$ entonces $x+2=-x+2$ esto es $2x=0$ esto es $x=0$ de modo que la intersección es $A_2=\emptyset$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x\geq 0$ y $x<-2$ la intersección es $A_3=\emptyset$. **(0.4 ptos.)**
- Si $x<0$ y $x<-2$ entonces $-x-2=-x+2$ esto es $-2=2$ de modo que la intersección es $A_4=\emptyset$. **(0.4 ptos.)**

La solución es pues $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\{x\geq 0\}$. **(0.4 ptos.)**
Otra manera de resolver es la siguiente, pero usa propiedades del módulo más que la definición misma de módulo, por lo que tiene *menos puntaje* **(1 pto.)**, a menos que se prueben usando la definición de módulo las propiedades que se indican entre paréntesis **(1 pto.)**.
Sabemos que $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ siempre que $a\geq 0$ y $b\geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
|x+2|=|x|+2 &\Leftrightarrow |x+2|^2=(|x|+2)^2 \quad \text{(pues $|x+2|\geq 0$ y $|x|+2\geq 0$)}\\
&\Leftrightarrow (x+2)^2=|x|^2+2|x|+4 \quad \text{(porque $|z|^2=z^2$)}\\
&\Leftrightarrow x^2+4x+4=|x|^2+2|x|+4 \quad \text{(cuadrado de binomio)}\\
&\Leftrightarrow x^2+4x+4=x^2+2|x|+4 \quad \text{(de nuevo $|z|^2=z^2$)}\\
&\Leftrightarrow x=|x| \quad \text{(simplificando)}\\
&\Leftrightarrow x\geq 0 \quad \text{($|z|=z$ ssi $z\geq 0$).}
\end{aligned}$$

**P2.-** **(i)** *(3 ptos.)* Dada la constante $a>0$, encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}<a.$$

Indicación: exprese la solución en función de los valores que puede tomar la constante $a$.

**(ii)** *(3 ptos.)* Sea $A$ el conjunto solucin de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea $B$ el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

- Resuelva las inecuaciones, esto es, determine $A$ y $B$.
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.
- Indique si existe acotamiento superior e inferior, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de estos 4 conjuntos, esto es, complete la tabla siguiente (puede usar el símbolo $\nexists$ si alguna entrada en la tabla no existe):

| cjto. | expresión en intervalos | cota sup. | cota inf. | máx. | mín. | sup. | ínf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | | | | |
| $B$ | | | | | | | |
| $A \cup B$ | | | | | | | |
| $A \cap B$ | | | | | | | |

**Pauta.-** **(i)** **(3 ptos.)** Resolviendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} < a \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} - a < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2-a^2-ax^2-a^3}{x^2+a^2} < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-a^2-ax^2-a^3 < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1-a)x^2 < a^2(1+a)
\end{aligned}$$

Hasta aquí **(0.6 pto.)** Separemos ahora por casos:

- Si $a < 1$ entonces queda

$$x^2 < \frac{a^2(1+a)}{1-a}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & |x| < \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}} \\
\Leftrightarrow\quad & -\sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}} < x < \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}
\end{aligned}$$

- Si $a > 1$ entonces queda

$$x^2 > \frac{a^2(1+a)}{1-a}$$

  Como el lado derecho de la desigualdad es negativo y $x^2 \geq 0$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. La solución $\left\{x > \sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}\right\} \cup \left\{x < -\sqrt{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}\right\}$ es incorrecta, pues las cantidades subradicales son negativas.

- Si $a = 1$ entonces queda $1(1+1) > 0$ lo que es cierto para todo real, esto es el conjunto solución en este caso es $\mathbb{R}$.

Puntaje por cada caso **(0.8 pto.)**

**(ii)** **(3 ptos.)**

- $A$:

$$
\begin{aligned}
& |x| \leq |x-1| \\
\Leftrightarrow\quad & -|x-1| \leq x \quad \text{y} \quad x \leq |x-1| \\
\Leftrightarrow\quad & (x-1 \geq -x \quad \text{o} \quad x-1 \leq x) \quad \text{y} \quad (x \leq x-1 \quad \text{o} \quad -x \geq x-1) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x \geq \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad -1 \leq 0\right) \quad \text{y} \quad \left(0 \leq -1 \quad \text{o} \quad x \leq \frac{1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \;\cup\; \mathbb{R}\right) \;\cap\; \left(\emptyset \;\cup\; \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \mathbb{R} \;\cap\; \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

- $B$:

$$
\begin{aligned}
& |4x-2| > x(1-2x) \\
\Leftrightarrow\quad & 4x-2 > x(1-2x) \quad \text{o} \quad 4x-2 < -x(1-2x) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x^2+3x-2 > 0 \quad \text{o} \quad 2x^2-5x+2 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2(x+2)(x-\frac{1}{2}) > 0 \quad \text{o} \quad 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \;]-\infty,-2[\; \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[ \;\cup\; \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ \;\cup\; ]2,+\infty[ \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ \;\cup\; \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[
\end{aligned}
$$

- $A \cup B$: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$
- $A \cap B$: $\mathbb{R}$
- Tabla:

| cjto. | expresión en intervalos | cota sup. | cota inf. | máx. | mín. | sup. | ínf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ | $\exists$ o $\geq \frac{1}{2}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{2}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{2}$ | $\nexists$ |
| $B$ | $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $A \cup B$ | $\mathbb{R}$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $A \cap B$ | $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ | $\exists$ o $> \frac{1}{2}$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\frac{1}{2}$ | $\nexists$ |

Puntaje: **(0.8 pto.)** encontrar $A$, **(0.8 pto.)** encontrar $B$, **(0.4 pto.)** encontrar $A \cup B$ y $A \cap B$, **(1 pto.)** llenar la tabla correctamente según los resultados. Es importante corregir $A \cup B$, $A \cap B$ y la tabla de acuerdo a los resultados del alumno, esto es, si cometió un error en resolver las desigualdades esto le resta puntaje en esa parte, pero si luego estableció correctamente la unión o intersección o completó la tabla de manera coherente a sus errores, la parte correspondiente está correcta. Basta mencionar que las cotas superiores o inferiores existen o no, no importa si no se especifica una.

**P3.-** **(i)** Considere el conjunto $A$ definido por

$$A = \left\{ \frac{1}{|n-m|} \text{ tales que } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq m \right\}$$

**(a)** *(1.5 ptos.)* Pruebe que 1 es el máximo de $A$.

**(b)** *(1.5 ptos.)* Pruebe que 0 es el ínfimo de $A$. *Indicacin: use la Propiedad Arquimediana.*

**(ii)** Considere la circunferencia de ecuacin $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Denotamos por $O$ al origen del sistema de coordenadas.

**(a)** *(1 pto.)* Si $P$ es un punto de la circunferencia de coordenadas $(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, encuentre la ecuación de la recta $L$ que pasa por $P$ y es perpendicular al trazo $\overline{OP}$.

**(b)** *(1 pto.)* Calcule las coordenadas del punto $Q$ donde la recta $L$ intersecta al eje $OX$ en función de $x_0$ y de $R$.

**(c)** *(1 pto.)* Encuentre la ecuación de la elipse centrada en $O$ que tiene por directriz a la recta vertical por $Q$ y por foco al punto de coordenadas $(x_0, 0)$.

**Pauta.-** **(i)** **(a)** **(1.5 ptos.)**

- $\diamond$ 1 es cota superior de $A$ ya que $n \neq m \Rightarrow |n-m| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|n-m|} \leq 1$. **(1 pto.)** (Nota: no es necesario justificar rigurosamente que la distancia entre dos naturales distintos es a lo menos 1, aunque algunas secciones demostraron esta propiedad por inducción).
- $\diamond$ $1 \in A$ ya que por ejemplo $1 = \frac{1}{|1-2|}$. **(0.2 ptos.)**
- $\diamond$ Conclusión: 1 es el máximo de $A$. **(0.3 ptos.)** por la definición de máximo.

**(b)** **(1.5 ptos.)**

- $\diamond$ 0 es cota inferior de $A$ ya que $n \neq m \Rightarrow |n-m| > 0 \Rightarrow \frac{1}{|n-m|} > 0$. **(0.2 ptos.)**
- $\diamond$ Si hubiera una cota inferior $\varepsilon > 0$ de $A$, entonces, tomando $m = 1$ fijo, de la propiedad arquimediana $\exists n$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$ con $\frac{1}{n-1} \in A$ y por lo tanto $\varepsilon$ no puede ser cota inferior. **(1 pto.)**
- $\diamond$ Conclusión: 0 es el ínfimo de $A$. **(0.3 ptos.)** por la definición de ínfimo.

**(ii)** **(a)** **(1 pto.)** La pendiente del segmento $\overline{OP}$ es $y_0/x_0$, entonces la ecuación de la recta pedida es $L: y - y_0 = -x_0/y_0(x - x_0)$.

**(b)** **(1 pto.)** Para hallar $Q = (x_Q, 0)$ basta resolver $-y_0 = -x_0/y_0(x_Q - x_0)$ de donde $x_Q = \frac{y_0^2}{x_0} + x_0 = \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0} = R^2/x_0$, esto es $Q = (R^2/x_0, 0)$.

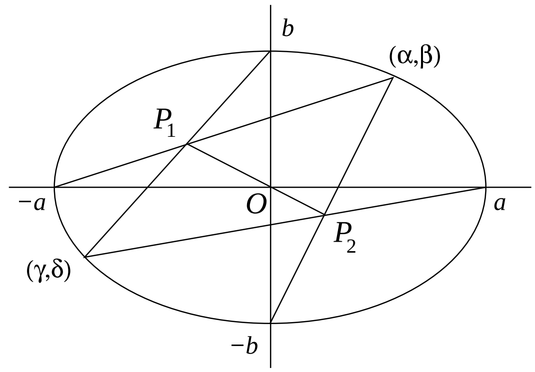
**(c)** **(1 pto.)** Busquemos la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si $e$ es la excentricidad de la elipse entonces $ae = x_0$ (foco) y $a/e = R^2/x_0$ (directriz), de donde multiplicando: $a^2 = R^2$, como buscamos $a > 0$ entonces $a = R$ y así $e = x_0/R$. Por otro lado $b^2 = a^2(1 - e^2)$ de donde $b = \sqrt{R^2 - x_0^2}$. También se puede hacer este problemas utilizando la relación $b^2 + c^2 = a^2$ donde $(c, 0)$ es un foco.
Nota (sin puntaje): la elipse queda inscrita entre la circunferencia y las rectas $y = \pm y_0$.

## 4. Problemas Resueltos

**P1.-** En la elipse de semiejes $a > 0$, $b > 0$ centrada en el origen $O$, el punto $(\alpha, \beta)$, con $0 < \alpha < a$, $0 < \beta < b$ es un punto cualquiera de la elipse en el primer cuadrante y el punto $(\gamma, \delta)$, con $-a < \gamma < 0$, $-b < \delta < 0$ es un punto cualquiera de la elipse en el tercer cuadrante. El objetivo de esta pregunta es demostrar que el segmento que une $P_1$ con $P_2$ contiene al origen.




**(i)** Si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, de la figura es claro que $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$. Demuestre que $0 \in \overline{P_1P_2}$ si $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$.

**(ii)** Determine cuidadosamente las ecuaciones de las cuatro rectas que definen $P_1$ y $P_2$.

**(iii)** Suponiendo conocidos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, determine las coordenadas de $P_1$ y de $P_2$.

**(iv)** Utilizando que $(\alpha, \beta)$, $(\gamma, \delta)$ están en la elipse, pruebe que $0 \in \overline{P_1P_2}$.

Solución **(i)** La recta que pasa por $P_1$ y $P_2$ tiene por ecuación $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ pues $x_1 \neq x_2$. Para que el origen pertenezca a la recta, es necesario que $0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1)$, esto es, bastaría que $y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1)$, esto es $x_2\, y_1 - x_1\, y_2 = 0$ lo que es equivalente a $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$ si $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$. Es importante mencionar que el orden lógico es $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2\, y_1 - x_1\, y_2 = 0 \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1) \Rightarrow 0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1) \Rightarrow 0 \in \overline{P_1P_2}$.

**(ii)** Si $L_1$ es la recta que pasa por $(\alpha, \beta)$ y $(-a, 0)$, $L_2$ es la recta que pasa por $(\alpha, \beta)$ y $(0, -b)$, $L_3$ es la recta que pasa por $(\gamma, \delta)$ y $(a, 0)$, $L_4$ es la recta que pasa por $(\gamma, \delta)$ y $(0, b)$, entonces

$$L_1 :\ y = \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a) \qquad L_2 :\ y = \frac{\beta + b}{\alpha}x - b$$
$$L_3 :\ y = \frac{\delta}{\gamma - a}(x - a) \qquad L_4 :\ y = \frac{\delta - b}{\gamma}x + b$$

Nota: un error en estas ecuaciones accarrea errores en toda la pregunta, por eso se dice en el enunciado “determine cuidadosamente”. En el caso de error, el alumno podrá aún resolver consecuentemente (iii) pero no (iv).

**(iii)** $P_1 = L_1 \cap L_4$, $P_2 = L_2 \cap L_3$, resolviendo los sistemas se obtiene:

$$x_1 = \gamma\frac{b(\alpha + a) - \beta a}{\gamma\beta - (\alpha + a)(\delta - b)} \qquad y_1 = \frac{\beta}{\alpha + a}(x_1 + a)$$
$$x_2 = \alpha\frac{-b(\gamma - a) + \delta a}{\alpha\delta - (\gamma - a)(\beta + b)} \qquad y_2 = \frac{\delta}{\gamma - a}(x_2 - a)$$

Notas: 1.- la simetría del problema se traduce en la simetría de las expresiones si se intercambia $a$ por $-a$, $b$ por $-b$, $\alpha$ por $\gamma$ y $\beta$ por $\delta$. El alumno puede usar este argumento para deducir $x_2$, $y_2$ a partir de $x_1$, $y_1$ o para deducir $L_3$, $L_4$ a partir de $L_1$, $L_2$ en la parte (ii). 2.- Si el alumno cometió errores en las ecuaciones de las rectas en (ii) y el cálculo de $P_1$ y $P_2$ reviste la misma dificultad, dar todo el puntaje si las coordenadas se calcularon bien en función del error. 3.- Note que se expresó $y_1$, $y_2$ en función de $x_1$, $x_2$. Esto es una práctica usual para evitar expresiones muy largas y es correcta, siempre que la sustitución sea trivial y no signifique mayores cálculos.

**(iv)** Usaremos el resultado de (i). Para ello desarrollamos:

$$
\begin{aligned}
& \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = \frac{\beta}{\alpha+a}\left(1+\frac{a}{x_1}\right) - \frac{\delta}{\gamma-a}\left(1-\frac{a}{x_2}\right) \\
= \; & \frac{\beta}{\alpha+a}\left(1+\frac{a}{\gamma}\,\frac{\gamma\beta-(\alpha+a)(\delta-b)}{b(\alpha+a)-\beta a}\right) - \frac{\delta}{\gamma-a}\left(1-\frac{a}{\alpha}\,\frac{\alpha\delta-(\gamma-a)(\beta+b)}{-b(\gamma-a)+\delta a}\right) \\
= \; & \frac{\beta}{\gamma(\alpha+a)}\,\frac{\gamma b(\alpha+a)-\gamma\beta a+\gamma\beta a-a(\alpha+a)(\delta-b)}{b(\alpha+a)-\beta a} \\
& - \frac{\delta}{\alpha(\gamma-a)}\,\frac{-\alpha b(\gamma-a)+\alpha\delta a-\alpha\delta a+a(\gamma-a)(\beta+b)}{-b(\gamma-a)+\delta a} \\
= \; & \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\gamma b-a(\delta-b)}{b(\alpha+a)-\beta a} - \frac{\delta}{\alpha}\,\frac{-\alpha b+a(\beta+b)}{-b(\gamma-a)+\delta a} \\
= \; & \frac{-\alpha\beta(\gamma b-\delta a+ab)(\gamma b-\delta a-ab)+\gamma\delta(-\alpha b+\beta a+ab)(-\alpha b+\beta a-ab)}{\%} \\
= \; & \frac{-\alpha\beta(\gamma^2b^2+\delta^2a^2-2\delta\gamma ab-a^2b^2)+\gamma\delta(\alpha^2b^2+\beta^2a^2-2\alpha\beta ab-a^2b^2)}{\%} \\
= \; & \frac{-\alpha\beta(\gamma^2b^2+\delta^2a^2-a^2b^2)-\gamma\delta(\alpha^2b^2+\beta^2a^2-a^2b^2)}{\%} \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

El último paso usa que $(\alpha,\beta)$, $(\gamma,\delta)$ están en la elipse.

**P2.-** **(i)** Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre que:

$$a\in\mathbb{R},\quad a\cdot a=0 \quad\Rightarrow\quad a=0.$$

(Si usa alguna otra propiedad, deberá demostrarla indicando los axiomas que use.)

**(ii)** Usando propiedades elementales de los reales demostradas en clases, demuestre que si $x,y,w,z\in\mathbb{R}$, $w\neq 0$, $z\neq 0$, entonces:

$$(xw+yz)^2=(x^2+y^2)(w^2+z^2) \quad\Rightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R}\text{ t.q. } x=\lambda w,\ y=\lambda z.$$

**(iii)** Usando propiedades elementales de los reales vistas en clases, demuestre que:

$$\forall a,b\in\mathbb{R} \qquad a^3b+ab^3\leq a^4+b^4.$$

Solución **(i)** La primera pregunta es delicada ya que no se puede invocar $a^{-1}$ sin antes suponer que $a\neq 0$. Supongamos $a\neq 0$ entonces, multiplicando la igualdad por $a^{-1}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
a\cdot a &= 0 \quad / \cdot a^{-1} && \text{(Ax. inverso mult.)} \\
(a\cdot a)\cdot a^{-1} &= 0\cdot a^{-1} && \text{(Def. suma)} \\
a\cdot(a\cdot a^{-1}) &= 0\cdot a^{-1} && \text{(Ax. asociatividad mult.)} \\
a\cdot 1 &= 0\cdot a^{-1} && \text{(Ax. inverso mult.)} \\
a &= 0\cdot a^{-1} && \text{(Ax. neutro mult.)} \\
a &= 0
\end{aligned}
$$

lo cual lleva a una contradicción. En el último paso usamos $\forall x\in\mathbb{R},\ x\cdot 0=0$, así es que lo demostramos:

$$\begin{aligned}
x \cdot 0 &= (x \cdot 0 + 0) + 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)} \\
&= (x \cdot 0 + (x \cdot 0 + -(x \cdot 0))) + 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)} \\
&= ((x \cdot 0 + x \cdot 0) + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. asociatividad suma.)} \\
&= (x \cdot (0 + 0) + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. distributividad)} \\
&= (x \cdot 0 + -(x \cdot 0)) + 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)} \\
&= 0 + 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)} \\
&= 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)}
\end{aligned}$$

Otras demostraciones, por ejemplo partiendo de $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + 0$ y luego cancelando son válidas, siempre que la cancelación se demuestre o se desglose en axiomas. Otra forma de demostrar sin pasar por esta propiedad es:

$$\begin{aligned}
a \cdot a &= 0 \qquad / + a \\
(a \cdot a) + a &= 0 + a \quad \text{(Def. suma)} \\
(a \cdot a) + a &= a \quad \text{(Ax. neutro suma)} \\
(a \cdot a) + (a \cdot 1) &= a \quad \text{(Ax. neutro mult.)} \\
a \cdot (a + 1) &= a \quad \text{(Ax. distributividad)} \\
&\Rightarrow \quad \text{(Unicidad neutro mult.)} \\
a + 1 &= 1 \qquad / + -1 \\
(a + 1) + -1 &= 1 + -1 \quad \text{(Def. suma)} \\
a + (1 + -1) &= 1 + -1 \quad \text{(Ax. asociatividad suma)} \\
a + 0 &= 0 \quad \text{(Ax. opuesto suma)} \\
a &= 0 \quad \text{(Ax. neutro suma)}
\end{aligned}$$

pero en este caso habría que demostrar que el neutro multiplicativo 1 es único, ya que esto es consecuencia de los axiomas.

**(ii)** Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, desarrollando ambos términos:

$$\begin{aligned}
(xw + yz)^2 &= (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \\
x^2w^2 + 2xwyz + y^2z^2 &= x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2 \\
2xwyz &= x^2z^2 + y^2w^2
\end{aligned}$$

De donde

$$(xz - yw)^2 = 0 \text{ y eso implica } xz = yw. \tag{1}$$

Ahora, si $z \neq 0$ entonces $x = \frac{y}{z}w$, y si $w \neq 0$ entonces $y = \frac{x}{w}z$, entonces basta tomar $\lambda = \frac{y}{z} = \frac{x}{w}$.

**(iii)** Hay por lo menos dos formas de resolver. Una es desarrollar $(a - b)^4$ y otra es factorizar el lado izquierdo por $ab$. Pero ambas usan la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ que no es necesario demostrar.

Por ejemplo la segunda opción de demostración usa esta propiedad dos veces:

$$\begin{aligned}
a^3b + ab^3 &= ab(a^2+b^2) \\
&\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}(a^4+2a^2b^2+b^4) \\
&= \frac{1}{2}(a^4+b^4)+a^2b^2 \\
&\leq \frac{1}{2}(a^4+b^4)+\frac{1}{2}(a^4+b^4) \\
&= (a^4+b^4).
\end{aligned}$$

**P3.-** **(i)** Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)\ |x+|x-2||} < \frac{1}{2}.$$

**(ii)** Sea $b$ un número real y definamos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \ (\forall \varepsilon > 0) \ \ x < b + \varepsilon\}.$$

Pruebe que $A$ es acotado superiormente y que tiene un supremo. Demuestre además que $\sup A = b$ ¿Tiene $A$ un máximo? Justifique claramente todas sus respuestas.

Solución **(i)** El signo del denominador sugiere separar en dos casos. Las soluciones respectivas son los conjuntos $S_1$ y $S_2$.

Caso 1: $x > 2$ (y por ende $2x+11 > 0$ y $2x-2 > 0$), queda

$$\begin{aligned}
\frac{x-2+2x+11}{(x-2)|x+x-2|} &< \frac{1}{2} \\
\frac{3x+9}{(x-2)(2x-2)} &< \frac{1}{2} \\
2(3x+9) &< (x-2)(2x-2) \\
6x+18 &< 2x^2-2x-4x+4 \\
2x^2-12x-14 &> 0 \\
x^2-6x-7 &> 0 \\
(x+1)(x-7) &> 0,
\end{aligned}$$

de donde tenemos

$$S_1 = (]-\infty,-1[\cup]7,+\infty[)\cap]2,+\infty[=]7,+\infty[.$$

Caso 2: $x < 2$ queda:

$$\begin{aligned}
\frac{-x+2+|2x+11|}{(x-2)|x-x+2|} &< \frac{1}{2} \\
-x+2+|2x+11| &> x-2 \\
|2x+11| &> 2x-4,
\end{aligned}$$

de donde $2x+11 > 2x-4$ o $2x+11 < -2x+4$ esto es $11 > -4$ o $x < -7/4$, o sea

$$S_2 = \mathbb{R}\cap]-\infty,2[=]-\infty,2[.$$

Finalmente

$$S = S_1 \cup S_2 = ]-\infty, 2[ \cup ]7, +\infty[.$$

Nota: se puede también restar 1/2 de ambos lados de la desigualdad y sumando llegar a una expresión del tipo $p/q < 0$, lo cual conduce a un análisis similar al presentado aquí.

**(ii)**
- $A$ acotado: en efecto tomando $\varepsilon = 1$, $(\forall x \in A)\ x < b+1$. En realidad $(\forall x \in A)$, $x < b+\varepsilon_0$, para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo. Luego $b + \varepsilon_0$ es cota superior de $A$ para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo y entonces $A$ es acotado superiormente.
- $A$ no vacío: en efecto $b \in A$ pues $(\forall \varepsilon > 0)\ b < b + \varepsilon$.
- $A$ tiene supremo: como $A$ es un suconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente el axioma del supremo asegura la existencia de $S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \sup A$.
- $S \geq b$: en efecto, esto es porque $b \in A$ y $S$ es cota superior de $A$, luego $b \leq S$.
- $S \leq b$: por contradicción. Si fuera $S > b$ entonces $S - b > 0$ y de la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $S - b > 1/n$, esto es $S > b + 1/n$. Pero $b + 1/n$ es cota superior de $A$ y sería estrictamente más pequeña que el supremo, lo que lleva a una contradicción.
- $\max A$: como $\sup A = b$ pertenece a $A$, entonces $A$ tiene máximo y $\max A = b$.

## 5. Bibliografía recomendada.


- T. Apostol, Cálculo, Vol. I., Reverté, 1965.
- R. Bartle, The elements of Real Analysis, John Wiley e Hijos, New York, 1964.
- H. Cartan, Cálculo Diferencial, Omega, 1972.
- C. Edwards y D. Penney, Cálculo con geometría analítica, Prentice Hall, 4ta. edición, 1996.
- A. Friedman, Advanced Calculus, Holt-Rinehart and Winston, 1971.
- J. Kitchen, Cálculo, McGraw-Hill, 1986.
- S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, 1968.
- M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, Reverté, 1970.
- G. Thomas y R. Finney, Cálculo: una variable, Addison-Wesley, 9a. edición, 1998.
- J. Marsden y M. Hoffman, Análisis Clásico Elemental, Addison-Wesley, 2a. edición, 1998.