INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN5602: Marketing II
Profs: M.Goic
Auxs: R. Álvarez, A. Carreño, Y. Hu, S. Pazos, F. Vidal

Auxiliar Control 1

Jueves 10 de Octubre de 2013

Repaso

1. Describa los siguientes modelos, mencionando un ejemplo de comportamiento observable de interés, distribución y heterogeneidad:

   - Modelo de Duración en Tiempo Discreto
     T= duración del cliente con la compañía.
     $T \sim$ Geométrica Desplazada (θ)
     $$P(T = t|\theta) = \theta(1-\theta)^{t-1}$$
     Heterogeneidad: Beta
     $$P(T = t|\alpha, \beta) = \frac{B(\alpha+1, \beta+t-1)}{B(\alpha, \beta)}$$

   - Modelo de Duración en Tiempo Contínuo

     a) Sin dependencia en la duración :
     T= tiempo en que hogar va a probar el producto.
     $T \sim$ Exponencial (λ)
     $$P(T \leq t|\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$$
     Heterogeneidad: Gamma
     $$P(T \leq t|\alpha, r) = 1 - (\frac{\alpha}{\alpha+t})^r$$

     b) Con dependencia en la duración:
     T= tiempo en que hogar prueba VOD
     $T \sim$ Weibull (λ, c)
     $$P(T \leq t|\lambda, c) = 1 - e^{-\lambda t^c}$$
     Heterogeneidad: Gamma
     $$P(T \leq t|\alpha, r, c) = 1 - (\frac{\alpha}{\alpha+t^c})^r$$

   - Modelo de Conteo
     X= número de exposiciones a valla publicitaria
     $X \sim$ Poisson (λ)
     $$P(X = i|\lambda) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$
     Heterogeneidad: Gamma
     $$P(X = i|\alpha, r) = \frac{\Gamma(r+i)}{\Gamma(r)i!}(\frac{\alpha}{\alpha+1})^r(\frac{1}{\alpha+1})^i$$

   - Modelo de Elección
     X_s= número de respuestas en segmento s
     $X_s \sim$ Binomial (m_s, p_s)
     $$P(X_s = j|m_s, p_s) = \binom{m_s}{j} p_s^j (1-p_s)^{m_s-j}$$
     Heterogeneidad: Beta
     $$P(X_s = j|\alpha, \beta) = \binom{m_s}{j} \frac{B(\alpha+j, \beta+m_s-x_s)}{B(\alpha, \beta)}$$

2. Grafique la tasa de riesgo para los siguientes eventos:
   Tasa de Riesgo: Probabilidad de que pase algo dado que no ha ocurrido

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

   Conociendo la tasa de riesgo podemos saber la distribución de la siguiente forma:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(u)du}$$

   - Instante en que una pareja se divorcia
   - Llegada de clientes a restaurante
   - Llegada de un bus al paradero del transantiago
   - Respuesta de un e-mail

Alternativas

1. ¿Cuál de los siguientes factores motivan la utilización de una distribución *gamma* para modelar la heterogeneidad de las tasas de adopción en un modelo de duración en tiempo continuo.

   I. Consistencia con el dominio de la probabilidad de abandono en cada periodo.
   II. Para generar una formula recursiva de fácil implementación.
   III. Flexibilidad para acomodar distintas formas de la distribución.
   IV. Para generar una formula cerrada que pueda ser calculada de manera computacionalmente eficiente.

   (a) Solo I.
   (b) Solo II.
   (c) I y II.
   (d) III y IV.
   (e) En ese modelo se ocupa una *beta* y no una *gamma*.

   Respuesta: d

2. ¿Cuál de los siguientes factores motivan la utilización de una distribución *beta* para modelar la heterogeneidad de las probabilidades de abandono en un modelo de duración en tiempo discreto.

   I. Consistencia con el dominio de la variable que describe el comportamiento a nivel individual.
   II. Para generar una formula recursiva de fácil implementación.
   III. Flexibilidad para acomodar distintas formas de la distribución.
   IV. Para derivar simultaneamente los errores estandares de la estimación.

   (a) Solo I.
   (b) Solo II.
   (c) I, II y III.
   (d) III y IV.
   (e) En ese modelo se ocupa una *gamma* y no una *beta*.

   Respuesta: c

3. Si asumimos que la data X queda bien descrita por un modelo con un vector de parámetros θ, entonces el estimador máximo verosimil viene dada por:

   (a) $\text{máx}_\theta\{\left[\frac{\Pr(\theta)}{\Pr(X|\theta)}\right]\}$
   (b) $\arg\text{máx}_\theta\{\ln\left[\Pr(X \mid \theta)\right]\}$

(c) $\arg \max_\theta \{[\Pr(\theta)]\}$

(d) $\arg \max_\theta \{[\Pr(X \mid \theta) \Pr(\theta)]\}$

(e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta: b

4. En clases estudiamos la respuesta a una campaña de marketing directo de los segmentos de *Ben's Knick Knacks Inc.* Una posibilidad para modelar este fenomeno es usar un modelo de conteo para describir cuantas respuestas recibimos de cada segmento. ¿Cuál es el problema con este enfoque que nos motiva a usar un modelo de elección en vez de un modelo de conteo?

   (a) Hay muchos segmentos y tienen diferente tamaño.

   (b) La probabilidad está acotada al rango [0,1]

   (c) Hay un número máximo de respuestas por segmento.

   (d) Todas las anteriores.

   (e) Ninguna de las anteriores.

   Respuesta: c

5. Sea $h(u) = 3u^2$ la tasa de riesgo de un modelo de duración en tiempo continuo. ¿Cuál es la probabilidad que el evento ocurra antes de un instante t?

   (a) 0.

   (b) $3t^2$.

   (c) $1 - 3t^2$

   (d) $1 - \exp(-t^3)$.

   (e) 1.

   Respuesta: d

Problema 1

Un canal de televisión está interesado en estudiar cómo evoluciona el rating[1] durante las tandas comerciales para decidir cuál es la duración de las tandas que menos degrada el nivel de audiencia. Para iniciar el análisis, el canal ha contratado datos de un panel que registra durante un mes, para una muestra de 256 clientes cuánto se demoran en cambiar de canal por primera vez una vez iniciada la emisión de avisaje publicitario. Con estos datos se ha estimado un modelo *Gamma-Exponencial* con parámetros (α, r) para describir el instante T de cambio de canal.

1. Muestre que la densidad de T viene dada por $f(T = t|\alpha, r) = \frac{r}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{r+1}$

Por definición, la densidad viene dada por:

$$\begin{aligned} f(T = t \mid \alpha, r) &= \int_0^\infty f(T = t \mid \lambda) g(\lambda \mid \alpha, r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \frac{\alpha^r \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}}{\Gamma(r)} d\lambda \end{aligned}$$

Tomando $s = r + 1$:

$$\begin{aligned} f(T = t \mid \alpha, r) &= \frac{s-1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\alpha^s \lambda^{s-1} e^{-\alpha\lambda}}{\Gamma(s)} d\lambda \\ &= \frac{s-1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^s \\ &= \frac{r}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{r+1} \end{aligned}$$

Otra forma, algebraicamente más sencilla:

$$\begin{aligned} f(T = t \mid \alpha, r) &= \frac{\partial F(t \mid \alpha, r)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^r\right) \\ &= \frac{r}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{r+1} \end{aligned}$$

2. Sea $\varepsilon > 0$ y suponga que en un instante $t - \varepsilon$, un televidente no ha cambiado de canal. ¿Cuál es la probabilidad que cliente no cambie antes de t? Discuta la interpretación de sus resultados cuando $\varepsilon \to 0$ y cuando $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \Pr(T \geq t \mid T \geq t - \epsilon) &= \frac{\Pr(T \geq t \wedge T \geq t - \varepsilon)}{\Pr(T \geq t - \epsilon)} \\ &= \frac{\Pr(T \geq t)}{\Pr(T \geq t - \varepsilon)} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^r}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+t-\varepsilon}\right)^r} \\ &= \left(\frac{\alpha+t-\varepsilon}{\alpha+t}\right)^r \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha+t}\right)^r \end{aligned}$$

[1] Se define rating como la proporción de los hogares que está sintonizando un canal en cada instante del tiempo.

3. Sea n_{dt} el número de televidentes que cambian de canal durante el minuto t de la tanda d. Escriba la verosimilitud del problema en función de los dos parámetros del problema (α, r)

La log verosimilitud viene dada por:

$$\begin{aligned} LL &= \sum_d \sum_t n_{dt} \ln \left[\Pr(T \leq t+1 \mid \alpha, r) - \Pr(T \leq t \mid \alpha, r) \right] \\ &= \sum_d \sum_t n_{dt} \ln \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha + t} \right)^r - \left(\frac{\alpha}{\alpha + t + 1} \right)^r \right] \end{aligned}$$

Hint: Recuerde que para un modelo *Gamma-Exponencial*, $\Pr(T \leq t \mid \alpha, r) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + t} \right)^r$

Problema 2

Un grupo de estudiantes, preocupados por su lugar en esta sociedad, debaten intensamente sobre vanguardia y nuevas tendencias. Empecinados en comparar su comportamiento relativo a sus pares se han propuesto diseñar un mecanismo que les permita medir si son o no lo suficientemente *hipsters*.

Después de un intenso debate han acordado que una aproximación razonable para esta medición viene dada por el número de visitas a *El Biografo*. Para ello han encuestado a $N = 123$ estudiantes registrando su edad, estado civil y numero de visitas al mencionado lugar en el último mes.

1. (2 puntos) Si x_i registra el numero de visitas a *El Biografo* en el último mes, escriba la log-verosimilitud de un modelo de conteo que considere dos clases latentes (una asociada a los *hipsters* y otra a los no *hipsters*). Procure incluir todas las normalizaciones necesarias para que su expresión sea directamente estimable.

   Sea N_i la variable aleatoria correspondiente al número de visitas a El Biografo. Entonces, aplicamos la definición directamente:

$$\begin{aligned} LL &= \sum_{i=1}^{N} \ln \left\{ \Pr\left(N_i = x_i \mid \lambda = \lambda_1\right) \Pr\left(\lambda = \lambda_1\right) + \Pr\left(N_i = x_i \mid \lambda = \lambda_2\right) \Pr\left(\lambda = \lambda_2\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} x_i \ln \left\{ \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1}}{x_i!} \frac{e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha}} + \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_2}}{x_i!} \frac{1}{1 + e^{\alpha}} \right\} \end{aligned}$$

2. (2 puntos) Al estimar el modelo se ha encontrado que $\lambda_1 = 0{,}1$ y $\lambda_2 = 2{,}3$ y que la probabilidad de pertenecer al segmento 1 es 0.7. ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante que ha asistido 1 vez a *El Biografo* en el último mes pertenezca al segmento *hipster*?

   Pertencer al segmento hipster es equivalente a poseer un $\lambda = \lambda_2$. Luego, usamos regla de bayes directamente:

$$\Pr\left(\lambda = \lambda_2 \mid N_i = x_i\right) = \frac{\Pr(N_i = x_i \mid \lambda_2) \Pr(\lambda = \lambda_2)}{\Pr(N_i = x_i \mid \lambda_1) \Pr(\lambda = \lambda_1) + \Pr(N_i = x_i \mid \lambda_2) \Pr(\lambda = \lambda_2)}$$

   donde

$$\begin{aligned} \Pr(N_i = x_i \mid \lambda_1) &= \lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1} / x_i! \\ &= 0{,}1 e^{-0{,}1} \\ &= 0{,}09 \\ \Pr(N_i = x_i \mid \lambda_2) &= \lambda_2^{x_i} e^{-\lambda_2} / x_i! \\ &= 2{,}3 e^{-2{,}3} \\ &= 0{,}23 \end{aligned}$$

   Luego, reemplazamos directamente tenemos

$$\begin{aligned} \Pr\left(\lambda = \lambda_2 \mid N_i = x_i\right) &= \frac{0{,}23 \cdot 0{,}3}{0{,}09 \cdot 0{,}7 + 0{,}23 \cdot 0{,}3} \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

3. (2 puntos) No conformes con la clasificación anterior, el grupo de estudiantes se propone estudiar un modelo con heterogeneidad continua. Para ello proponen que la tasa del proceso puede describirse como una función *Gamma*. Escriba la log-verosimilitud para este modelo.

   Nuevamente, aplicamos la definición directamente:

$$\begin{aligned} LL &= \sum_{i=1}^{N} \ln \left\{ \Pr\left(N_i = x_i \mid \alpha, r\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \ln \left\{ \frac{\Gamma(r+x_i)}{\Gamma(r) x_i!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{r} \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{x_i} \right\} \end{aligned}$$

Problema 3

Hippi es una empresa nacional dedicada a la fabricación de productos para alta montaña. La empresa cuenta con una base de datos que registra la compras que sus clientes en cada temporada y busca estudiar el numero de parkas que los clientes compraran en la temporada. Para esto, se ha formulado un modelo probabilístico donde el comportamiento de los clientes se describe como:

- Cada cliente compra un numero de parkas X que sigue una distribución geométrica. Esto es, condicional en el parametro p de cada cliente, la función de probabilidad esta dada por:

$$\Pr(X = x|p) = p(1-p)^{x}.$$

- Los clientes son heterogeneos en su parametro p el que esta distribuido en la población de acuerdo a una distribución Beta:

$$g(p|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}.$$

Se puede mostrar (no es necesario que lo haga) que la distribución de el numero de compras para un cliente en la población y su respectiva esperanza estan dada por:

$$\Pr(X = x) = \frac{B(\alpha+1, \beta+x)}{B(\alpha, \beta)} \qquad E(X) = \frac{\alpha}{\beta - 1}$$

Siguiendo la convención adoptada en el curso, llamamos a este modelo Beta-Geométrico.

1. Muestre que la penetración de mercado (fracción de clientes que compró al menos una unidad) puede expresarse como $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

   La penetración p viene dada por:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - \Pr(X = 0) \\ &= 1 - \frac{B(\alpha+1, \beta)}{\alpha, \beta} \\ &= 1 - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= 1 - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

2. Usando el método de los momentos, estime los parametros del modelo. Para ello considere que la penetración de mercado es del 60 % y que el numero promedio de parkas que compra un cliente (incluyendo aquellos que no compraron) es igual a 2.5.

Resolvemos el siguiente sistema:

$$0{,}6 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad (1)$$

$$2{,}5 = \frac{\alpha}{\beta-1} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema

$$\hat{\alpha} = \frac{10}{11} \qquad \hat{\beta} = \frac{15}{11}$$

3. Se desea extender el modelo para que ademas incluya un segmento de clientes que nunca compra. Para este segmento de clientes, $\Pr(X = 0) = 1$. Sea π la proporcion de estos clientes en la poblacion, y $(1 - \pi)$ el segmento de clientes que se comporta de acuerdo al modelo Beta-Geometrico descrito anteriormente. Suponga que conoce x_i, el numero de compras hechas por cada cliente i en la base de datos $(i = 1, ..., n)$. Deduzca la función de verosimilitud que utilizaría para estimar el modelo.

Sea n_x el numero de clientes que compra x parkas. Entonces, la verosimilitud puede escribirse como

$$L(\alpha, \beta, \pi \mid x) = \prod_{x=1}^{\infty} \Pr(X = x \mid \alpha, \beta, \pi)^{n_x}$$

donde

$$\begin{aligned} \Pr(X = x \mid \alpha, \beta, \pi) &= \pi \Pr(X = x \mid \text{no adopta}) + (1 - \pi) \Pr(X = x \mid \text{puede adoptar}) \\ &= \begin{cases} \pi + (1 - \pi)\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} & x = 0 \\ (1 - \pi)\frac{B(\alpha+1,\beta+x)}{B(\alpha,\beta)} & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$