IN4301-1: Análisis y Matemáticas Financieras
Profesores: E. Contreras C. Jiménez
Auxiliares: A. Navarrete C. Vergara

Auxiliar 6: Matemáticas Financieras y Valor del Dinero en el Tiempo

Problema 1

Para comprar un computador portátil de última generación usted necesita 178 UF, este monto se puede conseguir mediante un crédito, para esto usted cuenta con 5 alternativas bancarias. Sabiendo que la tasa de inflación anual esperada es del 2 %, responda ¿cuál es la mejor alternativa?

1. El Banco A le ofrece una tasa del 6.02 % semestral real.
2. El Banco B le ofrece una tasa del 14 % anual con capitalización trimestral.
3. El Banco C le ofrece una tasa del 0.777 % mensual nominal.
4. Al Banco D usted debe pagar 200 UF al final del año.
5. El Banco E le ofrece pagar una tasa real anual de un 14 % que compone continuamente.
6. El Banco F le ofrece pagar una tasa anual de un 14 % que compone continuamente.

Problema 2

Usted necesita realizar una fuerte inversión en equipamiento electrónico para echar a andar un negocio de sonido. El equipo que más se adecua a sus necesidades, tiene un valor de mercado de $10.000.000. Como estudiante no tiene recursos para realizar dicha inversión, por lo que se ve obligado a pedir un préstamo bancario. Si pide un préstamo a cuota fija por el total del valor, a cuatro meses con cuatro periodos de gracia sin pago de intereses y un interés del 10 % mensual.

1. Confeccione la tabla de pago correspondiente al crédito.
2. Confeccione la tabla de pago correspondiente al crédito, suponiendo que se elegía la opción de amortizaciones iguales (ceteris paribus).
3. Compare.

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	–	–	–	–
8	–	–	–	–

Problema 3

Usted necesita realizar una fuerte inversión en equipamiento electrónico para echar a andar un negocio de sonido. El equipo que más se adecua a sus necesidades, tiene un valor de mercado de $10.000.000. Como estudiante no tiene recursos para realizar dicha inversión, por lo que se ve obligado a pedir un préstamo bancario. Si pide un préstamo a cuota fija por el total del valor, a cuatro meses con cuatro periodos de gracia sin pago de intereses y un interés del 10 % anual.

1. Confeccione la tabla de pago correspondiente al crédito.
2. Confeccione la tabla de pago correspondiente al crédito, suponiendo que se elegía la opción de amortizaciones iguales (ceteris paribus).
3. Compare.

Resumen

Conversión de tasa nominal a tasa efectiva:

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \tag{1}$$

Donde:

- i = Tasa de interés efectivo.
- r = Tasa de interés nominal.
- m = Número de capitalizaciones que ocurren dentro del período indicado en el enunciado de la tasa de interés nominal.

Conversiónde tasa nominal a tasa real

$$(1 + r_R) = \left[\frac{1 + r_N}{1 + \pi}\right] \tag{2}$$

Donde:

- r_R = Tasa de interés real.
- r_N = Tasa de interés nominal.
- π = Inflación.

Conversión entre tasas efectivas

$$(i_A + 1) = (i_S + 1)^2 = (i_T + 1)^4 = (i_B + 1)^6 = (i_M + 1)^{12} = (i_D + 1)^{365} \tag{3}$$

Donde:

- i_A = Interés Anual Efectivo.
- i_S = Interés Semestral Efectivo.
- i_T = Interés Trimestral Efectivo.
- i_B = Interés Bimestral Efectivo.
- i_M = Interés Mensual Efectivo.
- i_D = Interés Diario Efectivo.

Valor Futuro

- Con interés simple:
$$VF_n = VP(1 + i * n) \tag{4}$$
- Con interés compuesto:
$$VF_n = VP(1 + i)^n \tag{5}$$

Donde:

- VF = Valor Futuro.
- VP = Valor Presente.
- i = Tasa de interés.
- n = Periodos de Capitalización.

Pagos Periódicos

$$PMT = P * \left(\frac{(1 + i)^n * i}{(1 + i)^n - 1} \right) = F * \left(\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right) \tag{6}$$

Donde:

- F = Valor Futuro.
- P = Valor Presente.
- i = Tasa de interés.
- $\left(\frac{(1+i)^n * i}{(1+i)^n - 1} \right)$ = Factor de recuperación del capital (FRC).

Gradiente Uniforme

$$P_0 = P * \left(\frac{(1 + i)^n * i}{(1 + i)^n - 1} \right) \pm \frac{G}{i} * \left[\frac{(1 + i)^n * i}{(1 + i)^n - 1} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \tag{7}$$

Donde:

- P_0 = Valor Presente.
- P = Valor base.
- G = Monto de aumento periodo a periodo.
- i = Tasa de interés.
- $\pm$: Será $+$ cuando el monto G sea positivo (Gradiente Creciente), y $-$ cuando el monto G sea negativo (Gradient Decreciente).

Gradiente en escalada (geométrico uniforme)

$$P_0 = \frac{P}{E-i}\left[\left(\frac{1+E}{1+i}\right)^n - 1\right] \quad (8)$$

Donde:

- P_0 = Valor Presente.
- P = Valor base.
- E = Porcentaje de aumento del flujo.
- i = Tasa de interés.

Gradiente en escalada, asumiendo perpetuidad

$$P_0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{P}{E-i}\left[\left(\frac{1+E}{1+i}\right)^n - 1\right] = \frac{P}{i-E} \quad (9)$$

Siempre que $i > E$.

Métodos para calculo de las componentes de un préstamo

- Cuotas Iguales

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	A	–	–	–
1	$D = A - C$	$B = A * i$	$C = PMT - B$	PMT

- Amortizaciones Iguales

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	A	–	–	–
1	$D = A - AMORT$	$B = A * i$	$AMORT$	$C = AMORT + B$

- Fórmula general para cuotas iguales con periodo de gracia

$$Cuota(PMT) = Deuda * (1+i)^{PG} * \frac{i(1+i)^{n-PG}}{(1+i)^{n-PG} - 1} \quad (10)$$

Pauta Auxiliar 6

Miércoles 23 de Octubre del 2013

Problema 1

1. El Banco A ofrece un interés del 6,02 % semestral real. Para llevar la tasa a una tasa anual se utiliza la ecuación (3):

$$
\begin{aligned}
(1 + r_{a,anual}) &= (1 + r_{semestral})^2 \\
&= (1 + 0,0602)^2 \\
&= 1,0602^2 \\
&= 1,124
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, $r_{a,anual} = 12,4\,\%$.

2. El Banco B ofrece un interés del 14 % anual con capitalización trimestral. Para llevarla a una tasa anual efectiva se utiliza la ecuación (1):

$$
\begin{aligned}
(1 + i_{b,anual}) &= (1 + \frac{i_{trimestral}}{4})^4 \\
&= (1 + \frac{0,14}{4})^4 \\
&= 1,035^4 \\
&= 1,1475
\end{aligned}
$$

   Luego, $i_{b,anual}$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
i_{b,anual} &= 1,1475 - 1 \\
&= 14,75\,\%
\end{aligned}
$$

   Luego, mediante la identidad de Fisher (ecuación 3), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(1 + r_{b,anual}) &= \frac{(1 + i_{b,anual})}{(1 + \pi)} \\
&= \frac{1,1475}{1,02} \\
&= 1,125
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, $r_{b,anual} = 12,5\,\%$.

3. El Banco C le ofrece un interés del 0,777 % mensual nominal

$$
\begin{aligned}
(1 + i_{c,anual}) &= (1 + i_{mensual})^{12} \\
&= 1,00777^{12}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} i_{c,anual} &= 1,00777^{12} - 1 \\ &= 9,73\,\% \end{aligned}$$

Luego, mediante la identidad de Fisher, se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 + r_{c,anual}) &= \frac{(1 + i_{c,anual})}{(1 + \pi)} \\ &= \frac{1,0973}{1,02} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_{c,anual} = 7,5\,\%$.

4. Al Banco D usted debe pagar 200UF al final del año. Usando la ecuación de valor futuro (número 5):

$$\begin{aligned} VF_1 &= VP(1 + r_{d,anual})^1 \\ 200 &= 178 * (1 + r_{d,anual})^1 \end{aligned}$$

Quedando: $r_d = 12,35\,\%$

Nota: El que n sea igual a uno, ver fórmula 5, se debe a que deseamos calcular el valor futuro en un año más.

5. El Banco E le ofrece una tasa real anual de 14 % que compone continuamente

Las fórmulas de composición continua se presentan a continuación:

$$VF_n = VPe^{r*n} \tag{11}$$

$$(1 + r)^n = e^{r*n} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} (1 + r_e) &= e^r \\ (1 + r_e) &= e^{0,14} \\ r_e &= 15,02\,\% \end{aligned}$$

6. El Banco F le ofrece una tasa anual de 14 % que compone continuamente

$$\begin{aligned} (1 + i_f) &= e^i \\ (1 + i_f) &= e^{0,14} \\ i_f &= 15,02\,\% \end{aligned}$$

Luego, mediante la identidad de Fisher (ecuación 3), se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 + r_{f,anual}) &= \frac{(1 + i_{f,anual})}{(1 + \pi)} \\ &= \frac{1,1502}{1,02} \\ &= 1,127 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_{b,anual} = 12,7\,\%$.

Finalmente, una vez analizadas todas las opciones, la alternativa que más conviene es la del Banco C.

Problema 2

1. Lo primero que debemos hacer es calcular las cuotas, lo hacemos mediante la fórmula (6) adaptada al caso con periodos de gracia y sin pago de interés, y nos queda:

$$\begin{aligned} PMT &= P * \left(\frac{(1+i)^{n-PG} * i}{(1+i)^{n-PG} - 1}\right) \\ &= \$10{,}000{,}000 * \left(\frac{(1+10\,\%)^{8-4} * 10\,\%}{(1+10\,\%)^{8-4} - 1}\right) \\ &= \$3{,}154{,}708 \end{aligned}$$

Luego, al utilizar el método de cuotas iguales nos queda el siguiente cuadro:

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
1	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
2	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
3	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
4	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
5	\$7.845.292	\$1.000.000	\$2.154.708	\$3.154.708
6	\$5.475.113	\$784529	\$2.370.178	\$3.154.708
7	\$2.867.916	\$547.511	\$2.607.197	\$3.154.708
8	\$0	\$286.792	\$2.867.916	\$3.154.708
Total	–	**\$2.618.832**	**\$10.000.000**	**\$12.618.832**

2. Lo primero que debemos hacer es calcular el valor de la amortización, esta es:

$$\begin{aligned} AMORT &= \frac{Deuda}{Cantidad\ de\ pagos} \\ &= \frac{\$10{,}000{,}000}{4} \\ &= \$2{,}500{,}000 \end{aligned}$$

Luego, al utilizar el método de cuotas iguales nos queda el siguiente cuadro:

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
1	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
2	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
3	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
4	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
5	\$7.500.000	\$1.000.000	\$2.500.000	\$3.500.000
6	\$5.000.000	\$750.000	\$2.500.000	\$3.250.000
7	\$2.500.000	\$500.000	\$2.500.000	\$3.000.000
8	\$0	\$250.000	\$2.500.000	\$2.750.000
Total	–	**\$2.500.000**	**\$10.000.000**	**\$12.500.000**

3. Como se puede apreciar al elegir amortizaciones iguales el valor total a pagar es bastante menor (\$118.832). Esto se debe a que el único elemento que aminora el monto de la deuda es la amortización, y mediante este método desde el primer periodo la deuda disminuye a un monto mucho menor que si se aplicara el método de cuotas iguales.

Problema 3

1. Lo primero que se debe hacer es calcular la tasa efectiva, ya que de lo contrario no se podrían ocupar las fórmulas de valor presente, anualidades, gradientes, etc.

$$\begin{aligned}(1+i_{mensual})^{12} &= (1+i_{anual})\\ &= (1+0,1)^{\frac{1}{12}}\\ &= 1,1^{\frac{1}{12}}\\ &= 1,00797\end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_{a,anual} = 0,797\,\%$.

Luego, se deben calcular las cuotas, lo hacemos mediante la fórmula (6) adaptada al caso con periodos de gracia y sin pago de interés, y nos queda:

$$\begin{aligned}PMT &= P * \left(\frac{(1+i)^{n-PG} * i}{(1+i)^{n-PG}-1}\right)\\ &= \$10{,}000{,}000 * \left(\frac{(1+0,797\,\%)^{8-4} * 0,797\,\%}{(1+0,797\,\%)^{8-4}-1}\right)\\ &= \$2{,}550{,}036\end{aligned}$$

Luego, al utilizar el método de cuotas iguales nos queda el siguiente cuadro:

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	$10.000.000	$0	$0	$0
1	$10.000.000	$0	$0	$0
2	$10.000.000	$0	$0	$0
3	$10.000.000	$0	$0	$0
4	$10.000.000	$0	$0	$0
5	$7.529.705	$79.741	$2.470.295	$2.550.036
6	$5.039.712	$60.0.43	$2.489.993	$2.550.036
7	$2.529.863	$40.187	$2.509.849	$2.550.036
8	$0	$20.173	$2.529.863	$2.550.036
Total	–	**$200.145**	**$10.000.000**	**$10.200.145**

2. Lo primero que debemos hacer es calcular el valor de la amortización, esta es:

$$\begin{aligned} AMORT &= \frac{Deuda}{Cantidad\ de\ pagos} \\ &= \frac{\$10{,}000{,}000}{4} \\ &= \$2{,}500{,}000 \end{aligned}$$

Luego, al utilizar el método de cuotas iguales nos queda el siguiente cuadro:

Periodo	**Deuda**	**Interés**	**Amortización**	**Cuota**
0	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
1	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
2	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
3	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
4	\$10.000.000	\$0	\$0	\$0
5	\$7.500.000	\$79.741	\$2.500.000	\$2.579.741
6	\$5.000.000	\$59.806	\$2.500.000	\$2.559.806
7	\$2.500.000	\$39.871	\$2.500.000	\$2.539.871
8	\$0	\$19.935	\$2.500.000	\$2.519.935
Total	–	**\$199.354**	**\$10.000.000**	**\$10.199.354**

3. Como se puede apreciar cuando la tasa de interés es pequeña ambos métodos no presentan mayor diferencia. Aunque, de todos modos el método con Amortizaciones Iguales sigue siendo pagando menos.