Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Cadenas de Markov en tiempo Continuo

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

1. Una pequeña tienda tiene espacio para cinco clientes solamente. Los clientes llegan en autos de manera aleatoria, según un proceso de Poisson de tasa 10 autos por hora. El número de personas dentro de cada auto es una variable aleatoria N, donde $\Pr[N = 1] = 0,1$, $\Pr[N = 2] = 0,7$ y $\Pr[N = 3] = 0,2$. Las personas que llegan en los autos entran a la tienda, donde se quedan un tiempo exponencialmente distribuido de media 10 minutos. Las personas actúan independiente del resto y cuando terminan de comprar salen individualmente y esperan en el auto por el resto de sus acompañantes. Si al llegar un auto, la tienda no tiene espacio para todos las personas del auto, éste se retira y nadie del auto entrará a la tienda.

    a) Modele la tienda como una cadena de Markov en tiempo continuo.

    b) Si en promedio, cada persona gasta \$1.000 dentro de la tienda, ¿cuál es el beneficio esperado en el largo plazo?.

2. Considere un mercado del trabajo en el cual todos los empleos son iguales y existe un único salario w [\$/mes]. Además la fuerza laboral se puede dividir en dos grupos: los trabajadores "siempre esforzados" y los "siempre flojos". Desde el punto de vista de UN trabajador en particular que está desempleado suponga que el tiempo hasta su contratación se distribuye exponencialmente con tasa a[contrataciones/mes]. Igualmente, para un trabajador que tiene empleo, suponga que el tiempo hasta su despedido (por razones de fuerza mayor) se distribuye exponencialmente con tasa b.

    Por otro lado, un trabajador flojo que es sorprendido flojeando es despedido de inmediato. Asuma que el tiempo hasta la próxima ronda del supervisor también se distribuye exponencialmente pero con tasa q. Una ronda del supervisor no provoca ningún efecto sobre un trabajador esforzado, sin embargo provocará el despido inmediato de un trabajador flojo.

    Un trabajador "siempre esforzado" percibe que su salario líquido es $(w - e)$, donde e es una constante que representa el esfuerzo invertido. Los trabajadores flojos disfrutan íntegramente de su salario w (i.e. para ellos $e = 0$).

    a) Usando cadenas de Markov en tiempo continuo, determine qué fracción de su vida pasará desempleado un trabajador esforzado longevo. Del mismo modo, determine qué fracción de su vida estará desempleado un trabajador flojo longevo. Utilizando lo anterior determine una condición sobre w de tal forma que un trabajador prefiera ser "siempre esforzado"

    b) Si q tiende a infinito, ¿qué significa en este modelo?. ¿Qué pasa con la condición de la parte anterior?.

3. Considere un cajero automático al cual llegan clientes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/hora]. En el lugar donde se encuentra el cajero hay espacio para dos personas (una utilizando el cajero y otra esperando su turno). Si un cliente que llega encuentra que ya hay 2 personas ahí, se ve obligado a retirarse (buscará otro cajero).

    Cuando un cliente accede al cajero realiza alguna operación financiera, la que toma un tiempo exponencialmente distribuido, con media $1/\mu$ [horas]. Una fracción $1-p$ de los clientes se retira al terminar su primera operación, mientras que una fracción p de los clientes requiere una operación adicional, lo cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\gamma$ [horas]. Nadie realiza más de 2 operaciones.

    a) Modele el estado de ocupación del cajero como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley probabilidades estacionarias o de equilibrio. Plantee un sistema de ecuaciones a partir del cual se puedan obtener las probabilidades estacionarias.

    b) Respecto del comportamiento de largo plazo de este sistema, conteste las siguientes preguntas.

- ¿Qué fracción de los clientes que llegan con intenciones de usar el cajero logran su propósito?.
- *Dado que* un cliente logró utilizar el cajero, ¿cuál es la probabilidad que al llegar haya encontrado el cajero ocupado por una persona que estaba realizando su segunda operación?.
- Suponga que usted llega al lugar donde se ubica el cajero y lo encuentra ocupado por otro cliente (y nadie más esperando). Si dicho cliente está realizando su segunda operación ¿cuál es el valor esperado del tiempo que ud. deberá esperar (en cola) antes de poder usar el cajero?. ¿Y si el otro cliente está realizando su primera operación?.
- ¿Cuánto tiempo esperan en cola, en promedio, los clientes que logran utilizar el cajero?.

c) Suponga que el banco que administra este cajero cobra b [\$] por cada operación realizada (un cliente que realiza 2 operaciones significa un ingreso de $2b$). Además, mantener el cajero funcionando en ese lugar tiene un costo de c [\$/hora]. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el cajero se autofinancie?.

4. Una biblioteca cuenta con tres volúmenes de un mismo libro para prestar a sus usuarios. Los lectores llegan a la biblioteca de acuerdo a un proceso Poissoniano uniforme de tasa λ[Lectores / hora]. Un libro que es prestado será devuelto sólo cuando el usuario haya terminado de utilizarlo. El tiempo que demora un lector en leer un libro es una v.a. exponencialmente distribuida con media $1/\mu$[horas]. Si un usuario encuentra que no hay libros disponibles, puede pedir a la bibliotecaria que le deje el libro reservado. Apenas un libro es devuelto, la bibliotecaria llama por teléfono a quien lo tenía reservado, para que lo pase a retirar. La experiencia indica que el tiempo que pasa desde el llamado telefónico hasta que la persona pasa a buscar el libro es exactamente igual a cero. La bibliotecaria eso sí, no admite que haya más de un libro reservado.

   a) En promedio, ¿cuál es el número de libros que están prestados?. Generalice el resultado para el caso en que hay N libros en la biblioteca.

   b) En promedio, ¿cuántas solicitudes de préstamo se rechazan por unidad de tiempo?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un libro disponible?.

5. Una componente electrónica trabaja de la siguiente manera: ella recibe impulsos eléctricos según un proceso de Poisson de tasa 90 impulsos por hora. Un impulso es “guardado” hasta que llega el tercer impulso, instante en el cual la componente “dispara” e inmediatamente entra en una etapa de “recuperación”. Si un impulso llega mientras la componente está en la etapa de recuperación, éste se ignora. El tiempo que dura la etapa de recuperación es una variable aleatoria exponencial de media 1 minuto. Después que la etapa de recuperación termina, el ciclo se repite.

   a) Construya una cadena de Markov en tiempo continuo que describa el comportamiento dinámico de esta componente. Dibuje el diagrama de estados con las tasas de transición respectivas.

   b) ¿Cuál es la probabilidad que la componente esté en la etapa de recuperación en el largo plazo?.

   c) ¿Cuál es la esperanza del número de disparos que realiza la componente por hora en el largo plazo?.

6. Para enfrentar la estructura de cartel comercial de los más grandes productores mundiales de petróleo, el resto de los países han decidido implementar un sistema de agregación de demanda que les permita tener mayor poder negociador frente a las naciones miembros de la OPEP.

   El sistema funciona a través de ciclos de compra, en la cual los distintos países se van incorporando a medida que requieren comprar una cuota Q de petróleo. Se ha determinado que los países se incorporan según un proceso de Poisson de tasa λ [países/día].

   La duración de un ciclo de compra no es conocida, pero se sabe que es una variable aleatoria distribuida según una exponencial de valor esperado T [días].

En el momento que se cierra el ciclo de compra, los países ya incorporados pueden negociar un precio del barril con un descuento porcentual dado por la fórmula:

$$D[\,\%] = 20 \cdot (1 - e^{-N})$$

donde N es el número de países incorporados al momento de cerrar el ciclo.

a) Modele este sistema de agregación de demanda como una Cadena de Markov de Tiempo Continuo y determine en qué condiciones existe estado estacionario.

b) Calcule las probabilidades estacionarias asociadas a la Cadena.

c) Determine el tiempo promedio que debe esperar un país desde que se incorpora a un ciclo de compra hasta que éste se cierra y, por lo tanto, puede comprar el petróleo.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un ciclo se cierre con M países incorporados?.

e) Calcule el valor esperado del descuento porcentual que se obtiene en un ciclo de compra.

7. Cierta unidad académica dispone de 2 equipos de proyección *data show* que son utilizados para realizar presentaciones en actividades de docencia. Los equipos difieren en cuanto a la nitidez y potencia de la imagen que proyectan, siendo uno de ellos de alta calidad y otro de baja calidad. Los equipos son administrados por el Encargado de Sistemas.

Los profesores, auxiliares y alumnos solicitan los equipos en el momento que los necesitan para realizar una presentación. El Encargado de Sistemas ha observado que se reciben solicitudes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa α [solicitudes/hora]. Cuando una persona pide un data show se le entrega el mejor equipo disponible en ese momento. Si no hay equipos disponibles (ambos equipos han sido prestados a otros expositores) la solicitud es rechazada, y la persona que deseaba el data show se va desilusionada a realizar su presentación con medios menos sofisticados.

Una presentación tiene una duración aleatoria, exponencialmente distribuida con media $1/\beta$ [horas]. Al terminar su presentación el expositor devuelve el data show inmediatamente al Encargado de Sistemas.

Se sabe además que el equipo de baja calidad falla ocasionalmente. El tiempo que permanece en operación hasta fallar es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con tasa γ [fallas/hora]. Cuando el equipo falla durante una presentación el expositor llama inmediatamente al Encargado de Sistemas, el cual envía el equipo a reparación. El accidentado expositor continua después su presentación como mejor pueda. Un equipo nunca falla cuando no está siendo utilizado. La reparación de un data show toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\delta$ [horas]. Una vez reparado el equipo es recibido por el Encargado de Sistemas, quedando disponible para quien lo solicite.

a) Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que describa la disponibilidad de equipos data show de alta y baja calidad. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionarias e indique cómo calcularlas (no es necesario que las calcule).

b) ¿Cuál es el número medio de solicitudes rechazadas por unidad de tiempo en el largo plazo? (responda en términos de las probabilidades estacionarias y los demás parámetros del problema).

c) ¿En el largo plazo, cuál es la tasa de utilzación de cada uno de los equipos (fracción de su tiempo que son usados)?.

d) Si a un expositor le acaban de prestar el data show de baja calidad, ¿cuál es la probabilidad que alcance a terminar su presentación sin que el equipo falle?.

8. A un banco de sangre los donantes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ, todos los donantes donan un litro de sangre. Con el fin de realizar exámenes a la sangre donada llega una ambulancia y retira toda la sangre almacenada. La llegada de esta ambulancia puede considerarse como un proceso de Poisson de tasa μ. Modele este sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo y determine las probabilidades estacionarias.

9. Cierto puerto ubicado en el sur del país está especialmente equipado para la descarga de mineral. Una flota de N barcos está a cargo del transporte del mineral. El puerto dispone de dos muelles destinados a descargar los barcos. El muelle 1 demora en promedio t_1 en descargar mientras que el muelle 2 tarda t_2. Algunos estudios realizados han permitido determinar que el tiempo de descarga en ambos muelles sigue una distribución exponencial. Por otro lado, el tiempo que demora un barco desde que sale del puerto (vacío) y regresa (cargado) es una variable aleatoria exponencial de media t_3. Cuando un barco llega al puerto ingresa el muelle 1 si éste se encuentra vacío, sino ingresa al muelle 2. De estar ambos muelles ocupados esperará en las cercanías hasta que alguno de los muelles se desocupe.

   a) Modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo. Construya el grafo asociado explicitando las tasa de cambio de un estado a otro.

   b) Determine las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias.

   c) Si $t_1 = 8hrs$, $t_2 = 16hrs$, $t_3 = 96hrs$ y $N = 4$ determine las probabilidades estacionarias del sistema.

   d) Si existe un costo de $c = 1$ por tener un barco esperando, ¿cuál es el costo diario del puerto por este concepto?.

10. (*) Un organismo unicelular tiene un ciclo de vida que permite distinguir 2 posible estados: Inmaduro (I) o desarrollado (D). Un individuo inmaduro permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido, con media $1/a$ [minutos]. Un individuo desarrollado permanece en ese estado un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/b$ [minutos], al cabo del cual se divide en 2, dando origen a 2 individuos inmaduros.

   a) Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que permita describir la evolución de una población de estos organismos, la cual comienza en $t = 0$ con un individuo inmaduro, ¿Qué estados definiría?. ¿Cuáles son las tasas de transición entre ellos?.

   b) Suponga que el tiempo transcurre hacia el infinito. ¿Cuál es el número de individuos que esperaría que hubiesen?.

11. (*) Usted ha decidido instalarse con un negocio para lustrar zapatos. El establecimiento consta de dos sillas. En la silla 1 los zapatos del cliente son limpiados y embetunados, para luego pasar a la silla 2, donde se les saca el brillo. Los tiempos de servicio en las dos sillas son variables aleatorias independientes, exponencialmente distribuidas de tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa λ y que el cliente sólo entra al establecimiento si las dos sillas están desocupadas.

   a) Modele el problema anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo.

   Suponga que ahora un ayudante es contratado y cada uno trabaja en una silla. Considere el mismo problema anterior, pero ahora un cliente potencial entra al negocio si la silla 1 está vacía. Cuando el trabajo en la silla 1 se termina, pasa a la silla 2 si está vacía o espera en la 1 hasta que la 2 se desocupe.

   b) Modele el nuevo problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Por qué puede hacerlo ?.

   c) ¿Qué proporción de clientes potenciales entran al establecimiento ?.

   d) ¿Cuál es la tasa promedio de entrada de clientes al negocio ?.

   e) ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro del negocio ?.

   f) En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un cliente que entra al local, dentro de éste?.

12. En un pueblo no muy lejano viven m personas. Precisamente en este instante una de las personas del pueblo acaba de retornar de tierras lejanas, donde desafortunadamente contrajo el virus del SIA. Es

decir en t=0, la población del pueblo consiste en un individuo infectado y m-1 individuos susceptibles de ser infectados. Una vez que un individuo se enferma, queda en ese estado para siempre. Se sabe que el tiempo que transcurre hasta que ocurre un encuentro peligroso entre dos individuos cualquiera de la población es independiente de todo lo demás y se distribuye exponencialmente con tasa λ. Cualquier par de individuos de la población puede tener un contacto peligroso. Si el contacto ocurre entre una persona infectada y una no infectada, entonces esta última se infecta. En otro tipo de contactos peligrosos (infectado-infectado, no infectado-no infectado) no hay efectos.

a) Si hay i personas infectadas en la población, ¿cómo se distribuye el tiempo transcurrido hasta que una persona determinada no infectada se infecta?.

b) Si hay i personas infectadas en la población, ¿cómo se distribuye el tiempo transcurrido hasta que alguna de las personas no infectadas se infecte?.

c) Construya una cadena de Markov en tiempo continuo que describa el número de personas infectadas en cada instante. ¿Cuál es el valor esperado del tiempo (partiendo de t=0) hasta que toda la población del pueblo este infectada con el virus del SIA?.

13. (*) Una joven se ha dado cuenta que tiene una lista interminable de amigos deseosos de ser su novio, por lo que ni tonta ni perezosa, ha decidido tener 2 novios simultáneamente, los que por confidencialidad llamaremos A y B.

Para ser justa en sus visitas ha determinado gastar un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa λ, con cada uno de ellos, de manera que si un instante está con A en un tiempo exponencialmente distribuido irá a visitar a B y viceversa. Todos los viajes pueden ser considerados instantáneos.

Por otra parte, sabe que mientras está con B el novio A puede llamarla a su celular para que inmediatamente vaya a visitarlo, lo que ocurre según un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_A. Ante esta solicitud la alumna inventa su mejor excusa e interrumpe abruptamente su visita al novio B para ir a reunirse con A.

La joven sabe que si bien el novio B es bastante tolerante no soportará más de tres interrupciones, consecutivas o no, por el inoportuno llamado del otro. Por esto, cada vez que se contabilizan tres interrupciones nuestra querida joven procede a apagar el celular y a ser especialmente cariñosa la siguiente vez que visita al novio B, demorándose en esta visita un tiempo exponencialmente distribuido de tasa λ_B ($\lambda_B > \lambda$). Esta visita "especial" permite anular todas las interrupciones que este ha tenido, por lo que al ir a reunirse con A vuelve a encender su celular.

a) Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las condiciones para que exista estado estacionario y plantee las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias.

En el largo plazo y en función de las probabilidades de estado estacionario determine:

b) ¿Cuál será el número esperado de llamadas del novio A, por unidad de tiempo, que terminarán en el buzón de voz de la joven?.

c) ¿Cuál será la fracción de las visitas de B que terminan interrumpidas por la llamada de A?.

d) Si la joven desea elegir λ_B para asegurarse que en promedio pasará la misma cantidad de tiempo con cada uno de sus dos novios, ¿cuál será el procedimiento a seguir?.

e) Suponga ahora que si el novio A realiza 3 llamados consecutivos sin recibir respuesta se aburrirá y abandonará a la joven, la que no tendrá ningún problema en conseguir otro novio de las mismas características para reemplazar a A apenas termine su visita al fiel novio B. Modifique el modelo anterior para incluir esta nueva situación.

14. Al terminal de buses de un pueblo concurren pasajeros de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ (personas/minuto). Las personas esperan en una fila, en el único andén del terminal, a los buses que los llevarán desde este lugar hasta el terminal en la capital.

    Considere que sólo existen 2 tipos de buses, los tipo 1 (pequeños y rápidos), y los tipo 2 (grandes y lentos). Los buses de tipo i demoran exactamente T_i horas en completar el viaje hasta la capital y se sabe que el tiempo entre arribos de los mismos (al terminal en el pueblo) son variables aleatorias iid exponenciales de media λ. Los buses (de ambos tipos) cuentan con una capacidad finita de pasajeros igual a K. Cada vez que un bus llega al terminal, los pasajeros presentes pueden decidir si abordar o no el bus. Se sabe que si el bus es de tipo 1 todos los pasajeros querrán abordar, mientras que si el bus es de tipo 2, algunos de los pasajeros de la fila pueden decidir esperar al próximo bus, con esperanzas de que éste sea del tipo 1. Suponga que esta decisión es completamente irracional, de manera que la probabilidad de que un pasajero que se encuentra en el i-ésimo lugar de la cola, independiente de todo lo demás escoja no viajar en un bus tipo 2, y por lo tanto esperar al siguiente, es igual a P_i. Las personas que desean viajar en un bus suben a él, respetándose los órdenes de llegada y la capacidad del bus, mientras que los pasajeros que no desean viajar conservan el orden que tenían, en la fila remanente. Además, si un bus no encuentra pasajeros en el terminal seguirá su camino de inmediato.

    Finalmente suponga que tanto el tiempo que se demoran los pasajeros en subir al bus como la partida de éste son despreciables.

    a) Considerando P_i constante e igual a P, modele el número de personas en el terminal como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine cuáles son las transiciones posibles, las tasas involucradas y plantee las ecuaciones que permitan calcular una posible distribución de probabilidades estacionarias. ¿Cuál es la condición de estacionalidad?.

    Suponga que ahora permitimos que nuestros pasajeros "piensen" y sean racionales, es decir, puedan decidir si desean viajar o no en un bus, con el fin de minimizar su tiempo de viaje esperado.

    b) Explique el trade-off que enfrenta una persona en el i-ésimo lugar de la fila al decidir si desea tomar o no un bus lento.

    c) Encuentre la estrategia de decisión óptima para una persona que se encuentre en el i-ésimo lugar de la fila, en término de los parámetros del problema.

15. (*) Considere la complicada situación que vive Armijo Catalán, flamante Ejecutivo de una compañía. Este personaje recibe consultas de sus empleados (en forma de e-mails) de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ (e-mails/hora). La capacidad de la cuenta de Armijo es tal que puede almacenar a lo más 3 e-mails (el resto simplemente rebotará). Armijo responde a cada una estas consultas en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ y lo hará mientras hayan consultas sin responder (una a la vez). Cada vez que responde una consulta el e-mail correspondiente es borrado.

    Por otro lado la novia de Armijo llama a éste a su celular con el objeto de demandar atención inmediata por parte de él. El tiempo entre llamadas es una variable aleatoria distribuida exponencialmente de media $1/\delta$. Si la llamada se produce cuando Armijo se encuentra con menos de 3 consultas pendientes por contestar (incluyendo en la que se encuentra trabajando si corresponde) entonces, acudirá inmediatamente al encuentro con su enamorada con la cual pasará un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $1/\gamma$. Sin embargo si su cuenta de correo está llena acudirá donde su novia apenas termine de contestar el mensaje actual. Cuando la novia de este personaje ha llamado 2 veces sin recibir respuesta entra en un estado de shock (producto de celos injustificados?) y acude instantáneamente en encuentro de Armijo, al cual encuentra y reta durante un tiempo exponencial de media $1/\beta$. Tras este altercado la novia ingresa ilícitamente a la cuenta de correo de Armijo y borra todos los e-mails que encuentre. Por último considere que si el ejecutivo se encuentra en su oficina y sin mails pendientes se dedica a trabajar un su declaración de impuestos.

    a) Modele el estado de ocupación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo continuo.

b) Argumente la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba las ecuaciones que permitirían calcularlas.

En lo que sigue suponga conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena.

c) ¿Cual es el número promedio de "escenas de celos" que la novia le hace a Armijo en una hora.

d) ¿Que fracción del tiempo, en el largo plazo Armijo dedica a su declaración de impuestos?.

16. (*)Un ex-subsecretario de transportes de un país muy lejano, llamado Tom Bollinery, es el encargado de recibir propuestas para una licitación de Plantas de Revisión Técnica en una ciudad al sur del país, llamada Arrankawua. Sobre su escritorio caben un número indeterminado de sobres con propuestas, los que llegan según pun proceso de Poisson de tasa λ propuestas por hora. Sin embargo la licitación está arreglada de antemano, la cual previo pago de algunas comisiones será ganada por un amigo de Tom Bollinery, por lo que el ex-subsecretario ni siquiera mira las propuestas que le llegan, sino que simplemente a intervalos de tiempo exponencialmente distribuidos de tasa μ, toma todos los sobres que encuentre sobre su escritorio y los bota a la basura.

    a) Modele la cantidad de sobres con propuestas, sobre la mesa del subsecretario Bollinery como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario?.

    b) ¿Cuánto tiempo estará una propuesta sobre el escritorio del subsecretario?. ¿Cuál es el promedio de propuestas en el escritorio del subsecretario en el largo plazo?.

    Considere que como era de esperar la licitación fue adjudicada al amigo de Tom Bollinery, el cual lo ha contratado a Ud. para estudiar el sistema de espera de la Planta de Revisión Técnica. La planta consta de dos estaciones idénticas, que funcionan en paralelo que pueden ser modeladas como colas M/M/1/3. Esto es las llegadas son según un proceso de Poisson de tasa λ autos por hora, las atenciones son exponenciales de media $1/\mu$ horas, y la capacidad de cada estación es de 3 autos incluyendo al que se está sirviendo. Cuando un cliente llega se ubica en la estación que tenga menos autos y frente a empates, SIEMPRE prefieren la estación 1. Además los clientes que se encuentran al *final de cada fila*, se cambian instantáneamente a la cola de la otra estación si es que al cambiarse el número de autos que quedan delante de él es menor que el actual.

    c) Modele el estado de ocupación de cada estación de la Planta de Revisión Técnica en una única Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Encuentre la condición sobre las tasas para que exista régimen estacionario.

    d) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, entregue expresiones para :

    - La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar al sistema porque no hay capacidad disponible.
    - El número promedio de autos esperando por atención en toda la Planta.
    - El tiempo promedio de espera en cola de un auto que logra ingresar a la planta.

17. (*) Un grupo de M amigos de esta facultad ha decidido crear un club para facilitar el intercambio de juegos de sus flamantes Play2, para lo cual cada uno de los integrantes debe aportar un juego a un fondo común. Cuando un miembro de este exclusivo club devuelve un juego, demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa λ_s en volver a pedir otro, independiente de lo que hagan los demás. Por otra parte, la devolución de los juegos sigue una variable exponencialmente distribuida de tasa μ igual para todas las solicitudes.

    a) Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las condiciones para que exista estado estacionario y plantee las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias.

b) ¿Cuál es el tiempo que en promedio los *socios* deben esperar, desde que solicitan un juego hasta que lo tienen en su poder?.

Suponga ahora que a este club también llegan solicitudes de personas que no son socias, según un proceso de Poisson de tasa λ_n. Estas personas son atendidas sólo si hay algún juego disponible y cobrándoles una tarifa T [$]. El tiempo que transcurre hasta que un no socio devuelve un juego también es una variable aleatoria exponencialmente distribuida de tasa μ. En los casos en que un socio solicita un juego y no hay ninguno disponible éste es anotado en una lista, la que se atiende en estricto orden de llegada.

c) Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo y determine la relación que debe existir entre los parámetros del problema para que exista estado estacionario. Hint: Si lo desea, puede referirse sólo a los casos interesantes.

d) En término de las probabilidades estacionarias calcule:

- Los ingresos esperados por unidad de tiempo y el número esperado de solicitudes de personas que no son socias *rechazadas* por unidad de tiempo.
- El tiempo que en promedio los *socios* deben esperar, desde que solicitan un juego hasta que lo tienen en su poder.

18. (*) En un cine del sector céntrico se está exibiendo un exitoso show rotativo, con funciones de exactamente 1 hora de duración y una capacidad de N asientos.

Los espectadores que están dentro de la sala pueden decidir quedarse y repetirse la función, lo que ocurre con una probabilidad r independiente de lo que hagan los demás. Cada vez que termina una función, y se retiran los espectadores que ya se aburrieron del show, se permite la entrada de quienes están esperando afuera, mientras haya capacidad disponible. Si no hay lugar para todos, los que no pueden ingresar se retiran indignados. Los espectadores llegan a la puerta de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_1[espectadores/minuto].

a) Modele el número de espectadores dentro del cine como una cadena de Markov. Explicite las probabilidades de transición de una etapa, comente la existencia de probabilidades estacionarias.

Suponga ahora que se decide implementar un sistema de cabinas individuales para ver las películas. Suponga que el tiempo que pasa un espectador dentro del cine es una variable aleatoria exponencialmente distribuida de tasa μ[1/minutos].

La llegada de espectadores de este nuevo servicio sigue un proceso de Poisson de tasa λ_2[espectadores/minuto] y existen M cabinas disponibles.

b) Modele la situación como una cadena de Markov en tiempo continuo, suponiendo que si los clientes que llegan y no encuentran una cabina vacía se retiran indignados.

c) Modifique su modelo suponiendo que existe una probabilidad p_i que un cliente haga cola si cuando llega ya hay i clientes esperando a que se desocupe una cabina, donde $p_i > p_{i+1}$ y $p_0 = 1$.

19. Una casa comercial ha decidido clasificar a sus clientes en 2 tipos: los tipo 1, *que recomiendan la tienda a sus amigos* y los tipo 2, *que no la recomiendan.* El gerente comercial sabe que cada uno de los clientes que recomiendan la tienda traerá un nuevo cliente luego de un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa λ, el cual con probabilidad r será de tipo 1, y con probabilidad $(1-r)$ será de tipo 2. Además, a esta casa comercial llegan clientes tipo 2 de manera exógena, según un proceso de Poisson de tasa θ.

Se sabe que un cliente del tipo 1 dejará de ser cliente de la casa comercial luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa μ. De la misma manera, un cliente tipo 2 dejará de ser cliente luego de un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa ν.

a) Modele la base de clientes de la casa comercial como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición.
Hint: No es necesario que dibuje toda la cadena.

b) Calcule $E[X_i(t)]$, donde $X_i(t)$ es una variable que indica el número de clientes tipo i que tiene la casa comercial en el tiempo T, $i = 1, 2$.

c) Suponga que el gerente comercial está interesado en el estudio de la base de clientes en el largo plazo. Calcule la esperanza del número de clientes tipo 1 y del número de clientes tipo 2, en función de los parámetros del problema.

20. (*) En cierto local de la ciudad se acaba de instalar "La Casa del Taca-taca". A dicho local concurren estudiantes de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro $\lambda(estudiantes/hora)$.Cada estudiante, al entrar al local, paga una entrada de E [$], que le da derecho a jugar un partido de taca-taca. En el local hay dos taca-tacas, los cuales pueden ser utilizados en modalidad singles (dos jugadores en un taca-taca) o dobles (cuatro jugadores en un taca-taca). La duración de un partido es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con media $1/\mu$ [hr], independiente de si el partido es single o doble. Además el local cuenta con un amplio espacio para acomodar a quienes esperan su turno.

Las reglas de buena convivencia del local no permiten que un taca-taca sea usado en modalidad single si hay dos o más personas esperando para jugar. No obstante lo anterior, los jugadores prefieren la modalidad single, y jugarán de este modo siempre que sea posible, sin violar la regla antes mencionada. Note que esta forma de comportamiento permite que jugadores que comenzaron jugando un doble se repartan en dos taca-tacas para concluir su partido en modalidad single, en caso de desocuparse el otro taca-taca. De esta forma, jugadores que comenzaron jugando un single admitirán que se incorporen al partido dos jugadores más en caso que éstos lleguen al local y no haya otro taca-taca desocupado. Cuando un partido termina todos los jugadores que están participando en él se retiran del local.

a) Muestre que con las reglas de comportamiento descritas el estado de ocupación del local puede modelarse como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el grafo asociado y las tasas de transición entre estados. ¿Qué relación deben cumplir λ y m para que exista estado estacionario?. Escriba el sistema de ecuaciones a partir del cual es posible calcular las probabilidades estacionarias (no es necesario que lo resuelva).

Para lo que sigue suponga que el sistema alcanza estado estacionario.

b) A los taca-tacas se les debe hacer una mantención mensual, la que tiene un costo de $M(t_1, t_2)$ dado por:

$$M(t_1, t_2) = a \cdot t_1 + b \cdot t_2$$

donde t_1 y t_2 corresponden al total de horas jugadas durante el mes en modalidad single y doble respectivamente. Los parámetros a y b están medidos en [$\$/hora$] con ($a < b$). Calcule en términos de λ, m, a, b y las probabilidades estacionarias el mínimo valor que puede tener el valor de la entrada E de modo que el negocio pueda financiarse en el largo plazo.

2. Resolución problemas de Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

■ **10.** *a*) Primero debemos notar que la cadena es infinita, por lo tanto para tener una representación gráfica debemos generalizar. Si modelamos como estado el número de individuos inmaduros y desarrollados, entonces la cadena es la que se muestra en la figura 1 (para un estado genérico).

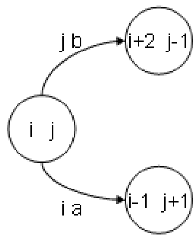

Figura 1: Cadena problema 10

b) Como el número de individuos nunca disminuye y las tasas de transición aumentan con esta evolución, en el largo plazo habrán infinitas personas.

■ **11.** *a*) La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura 2.

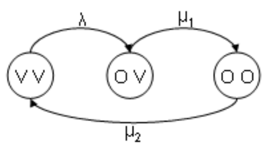

Figura 2: Cadena problema 11-1

b) Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la cadena es la mostrada en la figura 3.

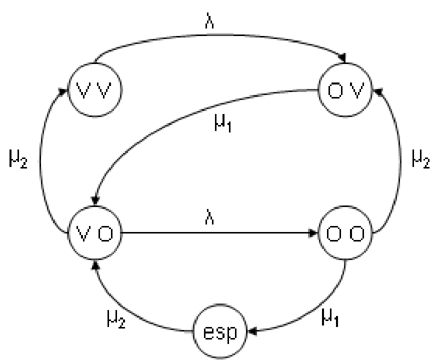

Figura 3: Cadena problema 11-2

c) Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
\Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
\Pi_{VO}(\lambda+\mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
\Pi_{OO}(\mu_1+\mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
\Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

d) Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

e) Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2\cdot\Pi_{OO} + 2\cdot\Pi_{Esp}$$

f) Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{1}{\mu_2}$$

Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.
Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \Pi_{VV}\cdot[\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}] + \Pi_{VO}\cdot[\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{1}{\mu_2}]$$

■ **13.** *a*) Los estados pueden ser definidos por par ordenado (i,j) donde:

$$\begin{aligned}
i &= \text{Novio al que se encuentra visitando, con } i \in \{A,B\} \\
j &= \text{Número de interrupciones acumuladas, con } i \in \{0,1,2,3\}
\end{aligned}$$

La cadena se muestra en la figura 4.
Las ecuaciones de estado estacionario serán las siguientes:

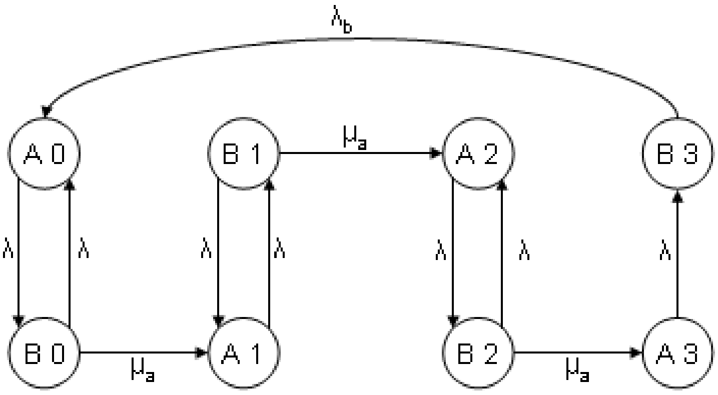

Figura 4: Cadena problema 13-1

$$
\begin{aligned}
\pi_{A,0} \cdot \lambda &= \pi_{B,3} \cdot \lambda_B + \pi_{B,0} \cdot \lambda \\
\pi_{A,0} \cdot \lambda &= \pi_{B,0} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,1} \cdot \lambda &= \pi_{B,1} \cdot \lambda + \pi_{B,0} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,1} \cdot \lambda &= \pi_{B,1} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,2} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot \lambda + \pi_{B,1} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,2} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,3} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,3} \cdot \lambda &= \pi_{B,3} \cdot \lambda_B \\
\textstyle\sum_e \pi_e &= 1
\end{aligned}
$$

Para esta cadena basta que las tasas λ, λ_B y μ_A sean mayores que 0 para que exista estado estacionario.[1]

b) Las llamadas perdidas por unidad de tiempo son $= \pi_{B,3} \cdot \mu_A$.

c) Entonces calculamos con el clásico $\frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}}$.

$$P = \frac{\mu_A(\pi_{B,0} + \pi_{B,1} + \pi_{B,2})}{\lambda(\pi_{A,0} + \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3})}$$

d) Basta con asegurar que :

$$\pi_{A,0} + \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3} = \pi_{B,0} + \pi_{B,1} + \pi_{B,2} + \pi_{B,3} = \frac{1}{2}$$

Dadas las ecuaciones podemos despejar cada uno de estos términos en función de los parámetros del problema, y desde ahí encontrar el valor de λ_B que asegura esta igualdad.

e) La cadena se muestra en la figura 5.

■ **15.** *a*) Para modelar esta situación como una cadena de Markov debemos considerar la localización de Armijo, ya que sólo si se encuentra trabajando podrá responder correo, pero el correo le llegará en cualquier localización. Además debemos distinguir un estado especial donde Armijo tendrá tres mails acumulados y un llamado perdido por parte de su novia, esto porque sólo desde aquí se podrá viajar a un estado de reto o al estado donde está con su novia y tiene 2 mails. Es importante

[1] Dado que la cadena es finita e irreductible

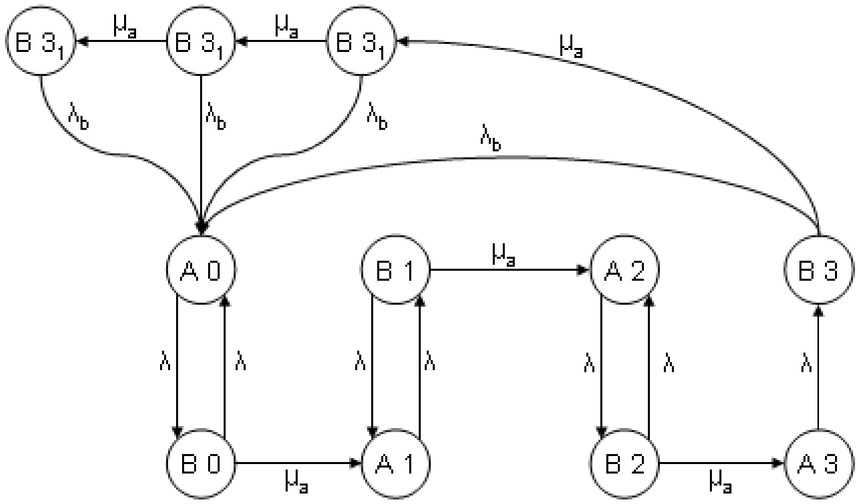

Figura 5: Cadena problema 13-2

notar que minetras está con su novia pueden llegarle mails por lo que no nos sirve un estado que sólo nos diga si está con su novia, adicionalmente nos debe entregar información acerca de la carga de trabajo acumulada. De acuerdo a esto la cadena de Markov se muestra en la figura 6.

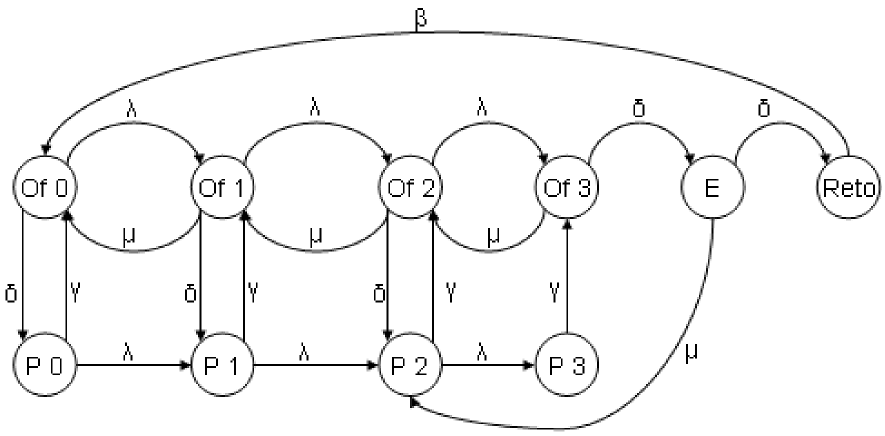

Figura 6: Cadena problema 15-1

b) Estamos frente a una cadena finita, por lo que sí existirán probabilidades estacionarias.
Las ecuaciones que determinan el valor de las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_{Of,0} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{Reto} \cdot \beta + \pi_{Of,1} \cdot \mu + \pi_{P,0} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,1} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,0} \cdot \lambda + \pi_{Of,2} \cdot \mu + \pi_{P,1} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,2} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,1} \cdot \lambda + \pi_{Of,3} \cdot \mu + \pi_{P,2} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,3} \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,2} \cdot \lambda + \pi_{P,3} \cdot \gamma \\
\pi_{P,0} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,0} \cdot \delta \\
\pi_{P,1} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,1} \cdot \delta + \pi_{P,0} \cdot \lambda \\
\pi_{P,2} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,2} \cdot \delta + \pi_{P,1} \cdot \lambda + \pi_E \cdot \mu \\
\pi_{P,3} \cdot \gamma &= \pi_{P,2} \cdot \lambda \\
\pi_E \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,3} \cdot \delta \\
\pi_{Reto} \cdot \beta &= \pi_E \cdot \delta \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

c) Supongamos que estamos durante toda una hora en el estado de reto. La tasa de salida del estado es β, por lo que en términos esperados habrán β retos durante esa hora. Sin embargo dado que no estoy todo el tiempo en ese estado debo ponderar por el tiempo que efectivamente estoy en ese estado. Entonces:

$$E[Retos/hora] = \pi_{Reto} \cdot \beta$$

Otra respuesta válida es suponer que estamos durante una hora en el estado E. Si fuese así habrían δ retos por hora. Entonces análogamente al caso anterior la respuesta sería:

$$E[Retos/hora] = \pi_E \cdot \delta$$

Ambas respuestas son equivalentes (basta revisar las ecuaciones de la parte 2).

d) La respuesta es simplemente

$$\pi_{Of,0}$$

■ **16.** *a*) Definiendo los estados como el número de ofertas que tiene Tom Bollinery sobre su escritorio en un instante cualquiera, la cadena se muestra en la figura 7.

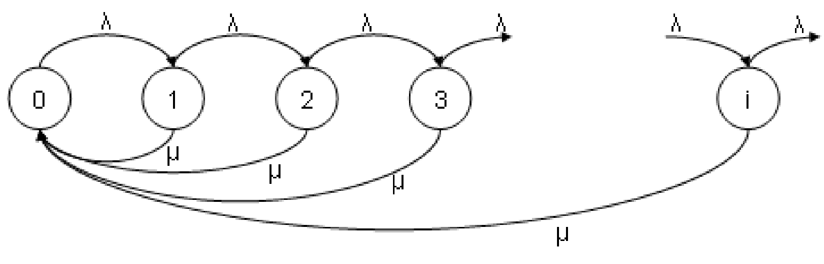

Figura 7: Cadena problema 16-1

En esta situación, lo único que hay que imponer para que exista régimen estacionario es que $\mu > 0$, porque siempre eventualmente el sistema se vaciará.

Aplicando conservación se flujo se tiene que las ecuaciones para calular las probabilidades estacionarias son :

$$
\begin{aligned}
\lambda \cdot \pi_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot \mu && (1)\\
(\lambda+\mu) \cdot \pi_1 &= \pi_0 \cdot \lambda && (2)\\
(\lambda+\mu) \cdot \pi_i &= \pi_{i-1} \cdot \lambda \quad \forall\, i \geq 2 && (3)\\
\sum_{i=0}^{\infty} &= 1 && (4)
\end{aligned}
$$

De la ecuación (4) se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} = (1-\pi_0)$$

reemplazando en (1) :

$$\lambda \cdot \pi_0 = (1-\pi_0) \cdot \mu \Longrightarrow \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Reemplazando π_0 en la ecuación (2) se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

Finalmente:

$$\pi_i = (\frac{\mu}{\lambda+\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i$$

b) El tiempo promedio que permanece una propuesta en el escritorio es :$\frac{1}{\mu}$
El número promedio de propuestas en el escritorio es :

$$L_{propuestas} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i$$

Usando la serie : $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$
se obtiene finalmente que :

$$L_{propuestas} = \frac{(\frac{\mu}{\lambda+\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})}{(1-(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}))^2}$$

c) Definiendo los estados como un par ordenado, en que la primera componente es el número de autos en la estación 1 y la segunda componente como el número de autos en la estación 2, la cadena se muestra en la figura 8.

d) La cadena es finita y todos los estados están comunicados, por lo que tiene probabilidades estacionarias y no hay necesidad de imponer condición alguna sobre las tasas .

1) La fracción de clientes que en una hora no puede ingresar a la planta es : $\Pi_{3,3}$
2) El número promedio de autos en espera, en la planta está dado por:

$$L_q = 1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}$$

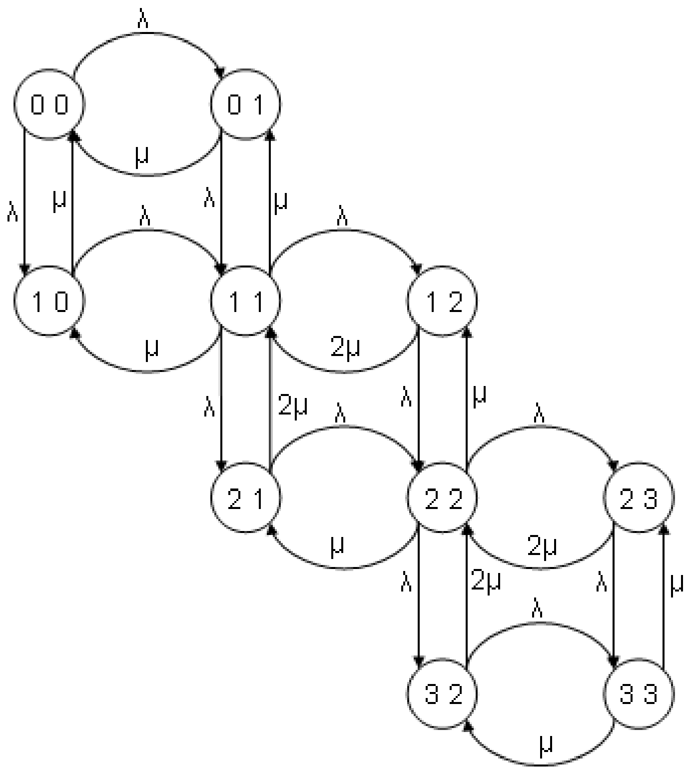

Figura 8: Cadena problema 16-2

3) El tiempo promedio de espera en cola de un auto antes de ser atendido, está dado por la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}}{\lambda \cdot (1 - \pi_{3,3})}$$

■ **17.** *a*) La cadena se muestra en la figura 9.

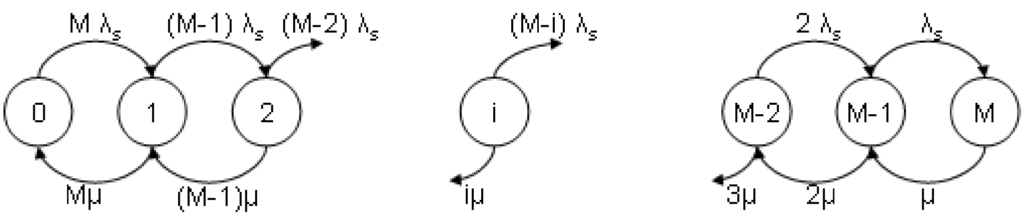

Figura 9: Cadena problema 17-1

Siempre existe estado estacionario porque la cadena es finita. Las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias son:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda_s}{\mu}\right)^i \frac{M!}{i! \cdot (M-i)!} \cdot \pi_0 = \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda_s}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1$$

b) Los socios nunca esperan porque siempre que solicitan un juego hay al menos uno disponible.

c) Siempre hay probabilidades estacionarias porque la cadena es finita, notar que el número de juegos prestados a no socios nunca es mayor que M y hay sólo M socios.

Vamos a identificar casos, donde i corresponde al número de juegos solicitados por los socios y j al número de juegos solicitados por los no socios:

Caso 1 $\qquad i = 0,\ j = 0$

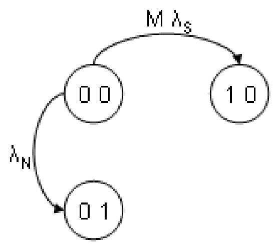

Figura 10: caso 1

Caso 2 $\qquad i = 0,\ M > j > 0$

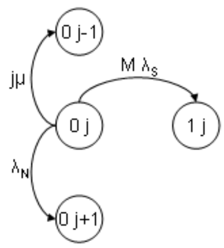

Figura 11: caso 2

Caso 3 $\qquad M > i > 0,\ j = 0$

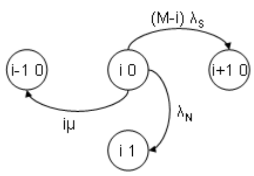

Figura 12: caso 3

Caso 4 $i > 0,\ j > 0,\ i + j < M$

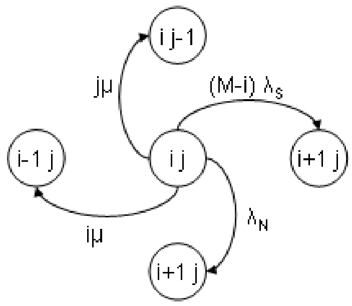

Figura 13: caso 4

Caso 5 $M > i > 0,\ M > j > 0,\ i + j \geq M$

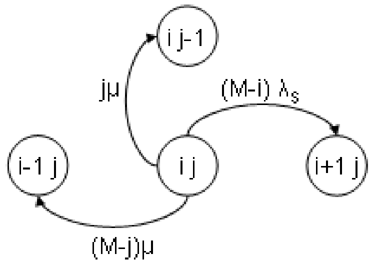

Figura 14: caso 5

Caso 6 $M > i > 0,\ j = M,\ i + j \geq M$

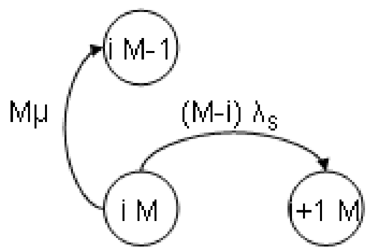

Figura 15: caso 6

Caso 7 $i = M,\ M > j > 0,\ i + j \geq M$

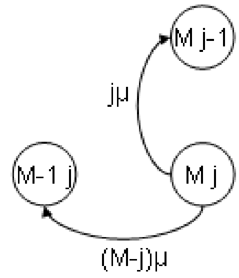

Figura 16: caso 7

d) En término de las probabilidades estacionarias:

- Los ingresos serán:

$$I = T \cdot \lambda_n \sum_{i,\, j/\ i+j<M} \pi_{(i,\, j)} \quad \text{con } i,\, j \in [0,\, M]$$

Y el número promedio de solicitudes rechazadas:

$$\lambda_n \sum_{i,\, j/\ i+j\geq M} \pi_{(i,\, j)} \quad \text{con } i,\, j \in [0,\, M]$$

- Dado PASTA, y considerando que si hay k personas en la lista cuando un socio llega deberá esperar en promedio $k \cdot \frac{1}{\mu}$ se tiene que:

$$E[\text{espera}] = \sum_{i,\, j/\ i+j\geq M} (i + j - M) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \pi_{(i,\, j)} \quad \text{con } i,\, j \in [0,\, M]$$

■ **18.** *a*) Claramente debemos modelar la cantidad de personas al interior del cine al comienzo de una función (esto es después de que los que estaban dentro deciden irse y los que llegan por primera vez entran). La cadena asociada se muestra en la figura 17.

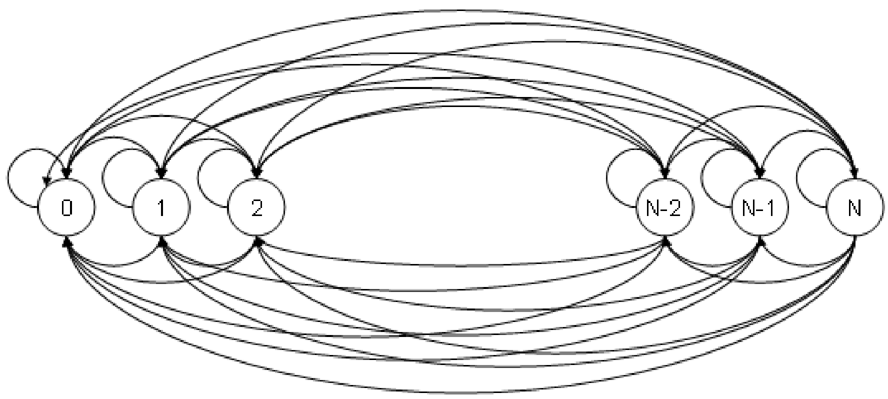

Figura 17: Cadena problema 18-1

Del grafo asociado vemos que todos los estados están comunicados entre sí por transiciones directas.

Para definir la cadena por completo debo especificar cuáles son las probabilidades de transición entre pares de estados. Para esto utilizamos probabilidades totales condicionando sobre el número de personas que está viendo la función y decide continuar:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} P_{ij}(\text{Dado que Se retiran k}) \cdot P[\text{Se retiran k}] \\ &= \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} P_{ij}(\text{Dado que Se retiran k}) \cdot \binom{i}{k} r^k (1-r)^{i-k} \end{aligned}$$

Sin embargo el término restante dependerá de el valor de j:

$$P_{ij}(\text{Dado que se retiran k}) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} & si \quad j < N \\ \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} & si \quad j = N \end{cases}$$

Entonces tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} \cdot \binom{i}{k} r^k (1-r)^{i-k} & j < N \\ \sum_{k=\text{máx}\{0,i-j\}}^{i} \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \cdot \binom{i}{k} r^k (1-r)^{i-k} & j = N \end{cases}$$

b) En esta parte tendremos una cadena de markov en tiempo continuo debido a la naturaleza aleatoria de la duración de la película. En este caso la cadena de Markov será la mostrada en la figura 18 (Se especifican las tasas en el grafo).

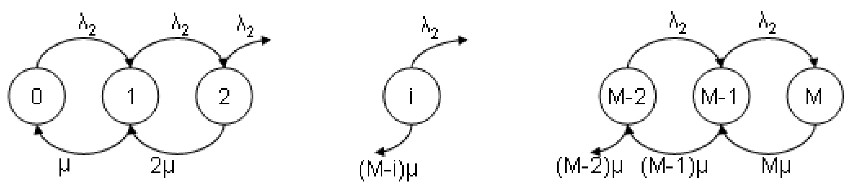

Figura 18: Cadena problema 18-2

c) Ahora podemos mantener gente en espera, pero cuando hay gente esperando la tasa de atención general ($N \cdot \mu$) no varía). De la misma forma que en la parte anterior el grafo de la cadena se muestra en la figura 19 (Se especifican las tasas en el grafo).

■ **20.** *a*) Dado que el número de personas dentro del recinto determina por sí solo cuál es la configuración de juego es que se puede modelar el número de personas en el recinto como una cadena de markov. Adicionalmente la duración exponencial de los partidos permiten modelarlo como una cadena de markov en tiempo continuo.

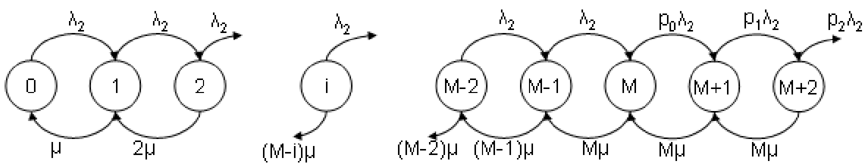

Figura 19: Cadena problema 18-3

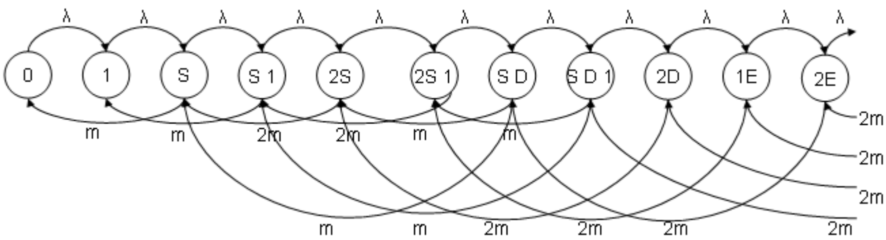

Figura 20: Cadena problema 20-1

La cadena resultante es la que se muestra a continuación (notar que se ha reemplazado el número de personas por la configuración de juego, dado que esto último ayuda a visualizar más fácilmente las tasas de trancisión).

Al igual que en cualquier cadena de markov infinita la condición de estado estacionario se refiere a la relación que deben tener los parámetros del problema para que el sistema no se "arranque" el infinito. En este caso (al igual que en los procesos de nacimiento y muerte), sólo tenemos una vía de escape, la cual es que las llegadas de los clientes sean más rápidas que las atenciones. Sin embargo, cuando este sistema está lleno, la tasa de atención "elimina" a 4 clientes de una sola vez, por lo tanto la condición de estado estacionario será que la "tasa" de llegada de 4 clientes sea menor a la tasa de desocupación de alguno de los taca-tacas, es decir:

$$4 \cdot \lambda < 2 \cdot \mu$$

Las ecuaciones que permiten encontrar la ley de probabilidades estacionarias son las siguientes (ahora nos referimos a los estados por el número de personas que involucra):

$$\begin{array}{rcll}
(\lambda) \cdot \pi_i & = & \pi_{i+2} \cdot m & i = 0 \\
(\lambda) \cdot \pi_i & = & \pi_0 \cdot \lambda + \pi_{i+2} \cdot m & i = 1 \\
(\lambda + m) \cdot \pi_i & = & \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+2} \cdot 2m + \pi_{i+4} \cdot m & i \in \{2, 3\} \\
(\lambda + 2m) \cdot \pi_i & = & \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+2} \cdot m + \pi_{i+4} \cdot 2m & i \in \{4, 5\} \\
(\lambda + 2m) \cdot \pi_i & = & \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+4} \cdot 2m & i > 5
\end{array}$$

b) Primero que nada notamos que la función de costos es lineal, por lo tanto la esperanza del costo mensual será:

$$E[\text{Costo/Hora}] = a \cdot (\pi_2 + \pi_3 + 2 \cdot \pi_4 + 2 \cdot \pi_5 + \pi_6 + \pi_7) + b \cdot (\pi_6 + \pi_7 + 2 \cdot \sum_{i=8}^{\infty} \pi_i)$$

Por otro lado las ganancias por hora serán (en términos esperados):

$$E[\text{Ganancia/Hora}] = \lambda \cdot E$$

Entonces el mínimo precio necesario para que el local se autofinancie es el que cumple con:

$$\lambda \cdot E^{*} = a \cdot (\pi_2 + \pi_3 + 2 \cdot \pi_4 + 2 \cdot \pi_5 + \pi_6 + \pi_7) + b \cdot (\pi_6 + \pi_7 + 2 \cdot \sum_{i=8}^{\infty} \pi_i)$$