# IN3401 - Estadística para la Economía y Gestión

# Auxiliar 8 Sección 2

Viernes 8 de noviembre de 2013

Profesores: Marcelo Olivares, Manuel Reyes, Richard Weber.
Auxiliares: José Miguel Alvarado, Angélica Córdova, Rodrigo Fernández, Patricio Perez, Tomás Wilner

## Problema 1

Una muestra de $n = 30$ observaciones se obtiene de una población con distribución Uniforme[0,$\theta$]. La muestra se describe en la siguiente tabla. El promedio muestral es $\bar{X} = 3.88$ y la desviación estándar es $S = 2.49$.

| n | Xi | n | Xi | n | Xi |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.29 | 11 | 1.76 | 21 | 2.03 |
| 2 | 0.44 | 12 | 3.96 | 22 | 8.06 |
| 3 | 1.96 | 13 | 0.35 | 23 | 7.86 |
| 4 | 0.78 | 14 | 6.42 | 24 | 2.81 |
| 5 | 0.77 | 15 | 0.11 | 25 | 1.44 |
| 6 | 1.18 | 16 | 4.00 | 26 | 6.15 |
| 7 | 7.50 | 17 | 3.96 | 27 | 5.75 |
| 8 | 7.16 | 18 | 7.59 | 28 | 4.09 |
| 9 | 1.76 | 19 | 5.26 | 29 | 4.22 |
| 10 | 4.40 | 20 | 4.54 | 30 | 4.67 |

Cuadro 1: Muestra aleatoria de población con distribución uniforme

1. Estimar $\theta$ mediante el método de los momentos.

   Solución:

   Si $X \sim U[0, \theta]$, entonces $E(X) = \theta/2$. El estimador esta dado por $\hat{\theta} = 2 \cdot \bar{X} = 7.76$

2. Calcular el error estándar del estimador obtenido en la parte 1.

   Solución:

   $Var(\hat{\theta}) = 4 * Var(\bar{X}) = 4 \cdot Var(X)/n$. Usando $S^2$ como estimador de $Var(X)$, el error estandar es

   $$SE(\hat{\theta}) = 2 \cdot 2,49/\sqrt{30} = 0,91$$

3. Desarrolle un algoritmo para construir un intervalo de confianza al 95 % para $\theta$ mediante Bootstrapping.

   Solución:

   Repetir R=1000 veces: simular 30 variables uniformes $[0, \hat{\theta}]$ y calcular para nueva muestra un nuevo estimador $\hat{\theta}^{(r)}$. Tomar los percentiles 2.5 % superior e inferior de estos $R$ estimadores para generar el intervalo de confianza.

4. Es posible que el estimador encontrado en la parte 1 sea efectivamente el verdadero parámetro $\theta$ que caracteriza la población? Explique.

   Solución:

   El estimador es $\hat{\theta} = 7,76$, pero hay una observacion superior a este valor (8.06), lo cual ocurre con probabilidad cero. Luego, es imposible que el verdadero parametro $\theta$ sea 7,76.

5. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$. Hint: Fíjese que restricciones debe satisfacer el estimador de Máxima Verosimilitud.

   Solución:

   La función de verosimilitud esta dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\theta},$$

   la cual tiende a infinito cuando $\theta$ tiende a cero. Pero vimos que $\theta$ debe ser mayor que el maximo de los $X_i$ (sino la verosimilitud vale 0). Luego, el estimador de maxima verosimilitud es $\hat{\theta}_{MV} = max\{X_i\}_{i=1...n} = 8,06$.

# Problema 2

Suponga que la v.a. X sigue una distribucion dada por la funcion densidad:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

La tabla que se muestra a continuación, presenta datos de una muestra aleatoria $X_1, ..., X_{20}$ y algunos estadísticos.

| **i** | **X** | **ln(X)** | **i** | **X** | **ln(X)** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.68 | -0.39 | 11 | 0.64 | -0.44 |
| 2 | 0.16 | -1.83 | 12 | 0.95 | -0.05 |
| 3 | 0.11 | -2.25 | 13 | 0.27 | -1.30 |
| 4 | 0.26 | -1.34 | 14 | 0.68 | -0.39 |
| 5 | 0.63 | -0.47 | 15 | 0.77 | -0.26 |
| 6 | 0.59 | -0.53 | 16 | 0.31 | -1.17 |
| 7 | 0.95 | -0.05 | 17 | 0.79 | -0.24 |
| 8 | 0.88 | -0.13 | 18 | 0-57 | -0.57 |
| 9 | 0.90 | -0.10 | 019 | 0.99 | -0.01 |
| 10 | 0.86 | -0.15 | 20 | 0.74 | -0.29 |
| | | | **Sum** | 12.72 | -11.98 |
| | | | **Average** | 0.64 | -0.60 |

Cuadro 2: Muestra aleatoria de población

1. Muestre que $E(X) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

   Solución:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int x \cdot f(x;\theta) dx \\ &= \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx \\ &= \theta \left[ \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \right]_{x=0}^{1} \\ &= \frac{\theta}{\theta+1}. \end{aligned}$$

   *Nota:* una respuesta más corta era darse cuenta que $X$ sigue una distribución Beta de parámetros $\alpha = \theta$ and $\beta = 1$. El valor esperado de una distribución Beta es $\alpha/(\alpha+\beta)$ .

2. Encuentre un estimador para $\theta$ usando el método de momentos. Calcule el valor del estimador con la muestra dada.

   Solución:

   Usando el primer momento:
   $$\mu = E(X) = \frac{\theta}{\theta + 1}$$
   Despejando $\theta$:
   $$\theta = \frac{\mu}{1-\mu}.$$
   Reemplazando $\mu$ por el promedio muestral $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:
   $$\hat{\theta} = \frac{\hat{\mu}}{1-\hat{\mu}} = \frac{0.64}{0.36} = 1.75$$

3. Encuentre el estimador de máxima verosimilitid (MLE) de $\theta$ (verifique que su estimador, en efecto, maximiza la función de verosimilitud). Calcule el valor estimado con la muestra dada.

   Solución:

   La función de verosimilitud está dada por:
   $$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}$$
   y la función log-verosimilitud es:
   $$LL(\theta) = n\log\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$
   Para encontrar el máximo, se utiliza la condición de primer orden (F.O.C.):
   $$\frac{\partial LL}{\partial\theta} = n/\theta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0$$
   Resolviendo se obtiene:
   $$\hat{\theta} = -\left(\frac{1}{n}\sum \log x_i\right)^{-1} = 1.67. \tag{1}$$
   Para chequear que es máximo, se calcula la segunda derivada:
   $$\frac{\partial^2 LL}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} \tag{2}$$
   la cual es siempre negativa. Esto implica que la $LL(\theta)$ es cóncava, por lo tanto tiene un único máximo global, que satisface la F.O.C.

4. Calcule un error estándar asintótico para el estimador de máxima verosimilitud derivado en la parte 3.

   Solución:

   El resultado de calcular el estimador de máxima verosimilitud implica que:
   $$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \to N(0, -H^{-1})$$
   donde $H = E(d^2 log f(\theta)/d\theta^2) = -1/\theta^2$. Por lo tanto:
   $$\begin{aligned} SE(\hat{\theta}) &= \sqrt{+(1/\theta^2)^{-1}}/\sqrt{n} \\ &= \theta/\sqrt{n}. \end{aligned}$$
   Reemplaznado $\theta$ por $\hat{\theta} = 1.67$ y $n = 20$ se obtiene$SE = 0.3734$ .