Introducción a la Teoría Cinética
Tarea 4 — Entrega 2 de octubre de 2013

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

1. **Conductividad eléctrica.** Considere un sistema en el cual, por algún mecanismo, los iones se mantienen a una temperatura inhomogénea. La inhomogeneidad es débil y la temperatura varía poco en un camino libre medio. Localmente la temperatura se describe por la función lineal $T = T_0(1+\varepsilon T_1 z)$, con $\varepsilon T_1 \ell \ll 1$, donde z es el eje del gradiente de temperatura. Los electrones tenderán a llegar a un equilibrio térmico con los iones, a su misma temperatura. Note que esto implicaría que la distribución de los electrones ya no es más homogénea. Resuelva la ecuación de Lorentz estacionaria para los electrones a primer orden en ε, considerando un modelo genérico de iones. Usando la solución, calcule el flujo de calor

$$\vec{Q} = \frac{m}{2}\int c^2 \vec{c} f(\vec{c}) d^3c$$

   y muestre que se cumple la ley de Fourier, $\vec{Q} = -\kappa \nabla T$. Usando el modelo BGK, calcule la conductividad térmica κ.

2. **Estimacióon del gap cinético.** El objetivo es hacer una estimación de la separación entre el valor propio nulo y el primer no nulo en el modelo de Lorentz. La estimación se basa en el método variacional de operadores hermíticos. Si L_0 es hermítico, las autofunciones y autovalores $L_0\psi_i = f_{\rm MB}\lambda_i\psi_i$ satisfacen:

   - Las autofunciones son ortogonales: $(\psi_i, f_{\rm MB}\psi_k) = \delta_{ik}$,
   - Las autofunciones generan una base del espacio funcional,
   - Los autovalores son reales: $\lambda \in \Re$,
   - Los autovalores se pueden ordenar: $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$

   a) Muestre que si ϕ es cualquier función con norma finita, entonces

$$\frac{(\phi, f_{\rm MB}L_0\phi)}{(\phi, f_{\rm MB}\phi)} \ge \lambda_0,$$

   deon λ_0 es el autovalor más pequeño.

   b) De manera análoga, si ϕ es ortogonal a las primeras n autofunciones $(\phi, f_{\rm MB}\psi_i) = 0, \quad i = 0,\dots,n-1$, muestre que

$$\frac{(\phi, f_{\rm MB}L_0\phi)}{(\phi, f_{\rm MB}\phi)} \ge \lambda_n.$$

   c) Sabiendo que L_0 es hermítico en el modelo de Lorentz, encuentre una cota inferior para el primer valor propio no nulo. Considere el modelo de esferas duras quietas. Para hacerlo, considere funciones simples (por ej. polinomios) que sean ortogonales a Ψ_0. Muestre que λ_1 está relacionado a la frecuencia de colisiones.

3. **Respuesta en frecuencia.** Considere el modelo de Lorentz con esferas duras rígidas, sujeta a un campo eléctrico oscilatorio. Resuelva la ecuación de Lorentz en la respuesta lineal y ecuentre expresiones integrales para las partes real e imaginaria de la conductividad eléctrica. Calcule las integrales a primer orden en ω y muestre que el desfase de la corriente al campo es proporcional a $\omega\ell/\langle|\vec{c}|\rangle$.