

Introducción a la Teoría Cinética

Tarea 2 — Entrega 4 de septiembre de 2013

Profesor: Rodrigo Soto
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

1. Teoría del camino libre medio mejorada

Una forma de mejorar la teoría del camino libre medio consiste en considerar que las partículas pueden venir de cualquier dirección desde una distancia ℓ . Para simplificar, consideremos el caso del flujo de calor. Se tiene un gas de densidad n_0 uniforme y temperatura $T(\vec{r})$. Se puede aproximar que la función distribución en un punto \vec{r} es

$$f(\vec{r}, \vec{c}) = \phi_{MB}(\vec{c}; T(\vec{r} - \ell \hat{c}))$$

donde $\hat{c} = \vec{c}/|c|$ y

$$\phi_{MB}(\vec{c}; T) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mc^2/2k_B T}$$

es la distribución de Maxwell-Boltzmann a densidad n_0 y temperatura T . Es decir, se dice que las partículas vienen desde una distribución de Maxwell con parámetros (temperatura) a una distancia ℓ en la dirección dada por \hat{c} .

Usando esta aproximación y la expresión para el flujo de calor, muestre que se cumple la Ley de Fourier y obtenga la conductividad térmica. Para hacer los cálculos debe hacer una expansión de Taylor en torno al punto \vec{r} .

2. Conductividad eléctrica en el modelo de Drude

El modelo de Drude considera que hay electrones en un metal que pueden viajar una distancia ℓ antes de chocar con los iones. En presencia de un campo eléctrico, los electrones se mueven aceleradamente hasta que chocan y ahí pierden toda su energía y vuelven a acelerarse partiendo del reposo.

Usando este modelo y las aproximaciones de la teoría de camino libre medio, calcule la conductividad eléctrica en este modelo.

3. Tasa de reacciones químicas

Considere un gas compuesto por una mezcla molecular, en la que se puede producir la siguiente reacción química $A + B \rightarrow C + D$. Se busca determinar la tasa de reacciones, es decir, el número de reacciones por unidad de tiempo y volumen.

Cuando dos moléculas de tipo A y B se encuentran, no todos los choques dan lugar a una reacción pues típicamente se tiene una *barrera de reacción* que indica que sólo hay reacción si la energía relativa $\mu g^2/2$ es mayor que un cierto ε , con $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ la masa reducida.

Usando las hipótesis de Boltzmann y considerando que las distribuciones de velocidades son de equilibrio termodinámico local, calcule la tasa de reacción si la sección eficaz es σ .

4. Análisis tensorial

- En la ecuación de Poisson $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ la densidad de carga ρ es un escalar. Muestre que si \vec{E} es un vector, entonces $\nabla \cdot \vec{E}$ también es un escalar. Es decir, muestre que $\nabla \cdot \vec{E}$ no cambia al rotar el sistema de coordenadas.
- En un fluido viscoso el tensor de presiones \mathbb{P} de componentes P_{ik} tiene una parte isótropa más otra que es proporcional al gradiente del campo de velocidades. Suponiendo que el espacio es isótropo muestre que la relación más genérica es

$$\mathbb{P} = p\mathbb{I} - \eta \left[(\nabla \vec{v}) + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v})\mathbb{I} \right] - \zeta (\nabla \cdot \vec{v})\mathbb{I}$$

donde usualmente p se llama presión hidrostática, η viscosidad de cizalle y ζ viscosidad de bulto. Se ha usado la notación que \mathbb{I} es el tensor identidad, $\nabla \vec{v}$ es el tensor gradiente (derivadas en las filas y componentes de la velocidad en las columnas) y el superíndice T indica transposición.