Clase Auxiliar número 10

Universidad de Chile

Fi2004- Termodinámica

Profesores Auxiliares: Milko Estrada - Jorge Sánchez.

1. Considera un punto cuántico, el cual corresponde a un defecto, el cual puede estar vacío, puede estar ocupado por un electron (que puede poseer spin up o spin down), o puede estar ocupado por dos electrones (uno con spin up y otro con spin down). Los números de ocupación de los electrones con spin up y down son $n_+ = 0, 1$ y $n_- = 0, 1$. Si la energía la calculas con la siguiente expresión:

$$E = -\epsilon(n_+ + n_-) + Un_+n_-$$

donde U es el potencial de Coulomb debido a la interacción de ambos electrones:

a) Calcula la energía para cuando el punto esta vacío, lleno con un electrón , con 2 electrones.

b) Calcula la gran función partición.

c) Calcula el número medio de partículas.

Hint $N = \frac{\partial \ln \Xi}{\partial(\beta\mu)}$

d) Calcula la probabilidad de doble ocupancia cuando $\mu \to 0$.

e) Calcula el número medio de partículas considerando $\mu \to 0$, con $U > \epsilon$ y en los límites de alta y bajas temperaturas.

2. Nuestro universo está lleno con radiación de cuerpo negro (fotones) a una temperatura de aprox. 3K.

   a) Expresa la densidad de estados en función de ϵ y de k, recuerda $\epsilon = \hbar c k$.

   b) Calcula el número de partículas por unidad de volúmen.

3. Considera un gas relativista de fermiones con energía $\epsilon = cp$.

   a) Calcula hasta segundo orden de T la energía a bajas temperaturas.

The Riemann zeta function is useful for evaluating integrals in statistical mechanics. In particular,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)}\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}. \tag{C.26}$$

Some low integer Riemann zeta functions are

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad ; \quad \zeta(3) = 1.202 \quad ; \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \tag{C.27}$$

$$\begin{array}{llllll}
\Gamma(-3/2) & = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} & \Gamma(1) & = 0! & \Gamma(5/2) & = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
\Gamma(-1/2) & = -2\sqrt{\pi} & \Gamma(3/2) & = \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \Gamma(3) & = 2! \\
\Gamma(1/2) & = \sqrt{\pi} & \Gamma(2) & = 1! & \Gamma(7/2) & = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \\
 & & & & \Gamma(4) & = 3!
\end{array}$$

$$\xi = \ln z,$$

$$F_\nu(e^\xi) \equiv \Gamma(\nu) f_\nu(e^\xi) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}dx}{e^{x-\xi}+1}.$$

$$f_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left[1 + \nu(\nu-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\xi^2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\xi^4} + \dots\right]$$