Clase Auxiliar número 10

Universidad de Chile

Fi2004- Termodinámica

Profesores Auxiliares: Milko Estrada - Jorge Sánchez.

1. Considerar la superposición de ondas armónicas compuestas por fotones

   a) Demuestra que la densidad de estados es $A(\epsilon)d\epsilon = \frac{V\epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 c^3 \hbar^3}$.

   Solución:

   Necesitamos encontrar la densidad de estados para sumar continuamente.

   Integraremos en el espacio de fase , donde la constante h^3 se usa para que no hayan problemas con las unidades y el 2 corresponde a las dos polarizaciones:

$$2 \cdot \frac{1}{h^3} \int d^3q \int d^3p =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{h^3} \cdot V \int d^3p$$

pasamos a esféricas $d^3p = 4\pi p^2 dp$

$$= 2 \cdot \frac{1}{h^3} \cdot V \cdot 4\pi \int p^2 dp$$

usamos $\epsilon = pc$ *y* $h = 2\pi\hbar$

$$= \cdot \frac{1}{\hbar^3 c^3 \pi^2} \cdot V \cdot \int \epsilon^2 d\epsilon$$

   Por tanto, ahora, en vez de la suma discreta $\sum$ *, para sumar continuamente* $\int$ *usamos el factor* $\frac{V\epsilon^2 d\epsilon}{\pi^2 c^3 \hbar^3}$.

   b) Muestra que el número de fotones a una temperatura T en un volúmen V es igual a $V(kT/\hbar c)^3$ multiplicado por una constante, desprecie μ.

   c) Calcula el calor específico a volúmen constante, el cual es directamente proporcional a T^3.

   Hint : Se adjuntan algunas fórmulas matemáticas (3)

2. Considera un gas relativista de fermiones con energía $\epsilon = cp$.

   a) Calcula el número de partículas y la energía de Fermi.

   Hint: $N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon$

   b) Calcula hasta segundo orden de T la energía a bajas temperaturas.

3. Nuestro universo está lleno con radiación de cuerpo negro (fotones) a una temperatura de aprox. 3K. Expresa el número de fotones por unidad de volúmen en función de las constantes de Boltzman, Planck, la velocidad de la luz y la temperatura. Cual será este valor?.

The Riemann zeta function is useful for evaluating integrals in statistical mechanics. In particular,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}. \qquad \text{(C.26)}$$

Some low integer Riemann zeta functions are

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad ; \quad \zeta(3) = 1.202 \quad ; \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \qquad \text{(C.27)}$$

$$\begin{array}{llllll}
\Gamma(-3/2) & = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} & \Gamma(1) & = 0! & \Gamma(5/2) & = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
\Gamma(-1/2) & = -2\sqrt{\pi} & \Gamma(3/2) & = \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \Gamma(3) & = 2! \\
\Gamma(1/2) & = \sqrt{\pi} & \Gamma(2) & = 1! & \Gamma(7/2) & = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \\
 & & & & \Gamma(4) & = 3!
\end{array}$$

$$\xi = \ln z,$$

$$F_\nu(e^\xi) \equiv \Gamma(\nu) f_\nu(e^\xi) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^{x-\xi} + 1}.$$

$$f_\nu(e^\xi) = \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\xi^2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\xi^4} + \dots \right]$$