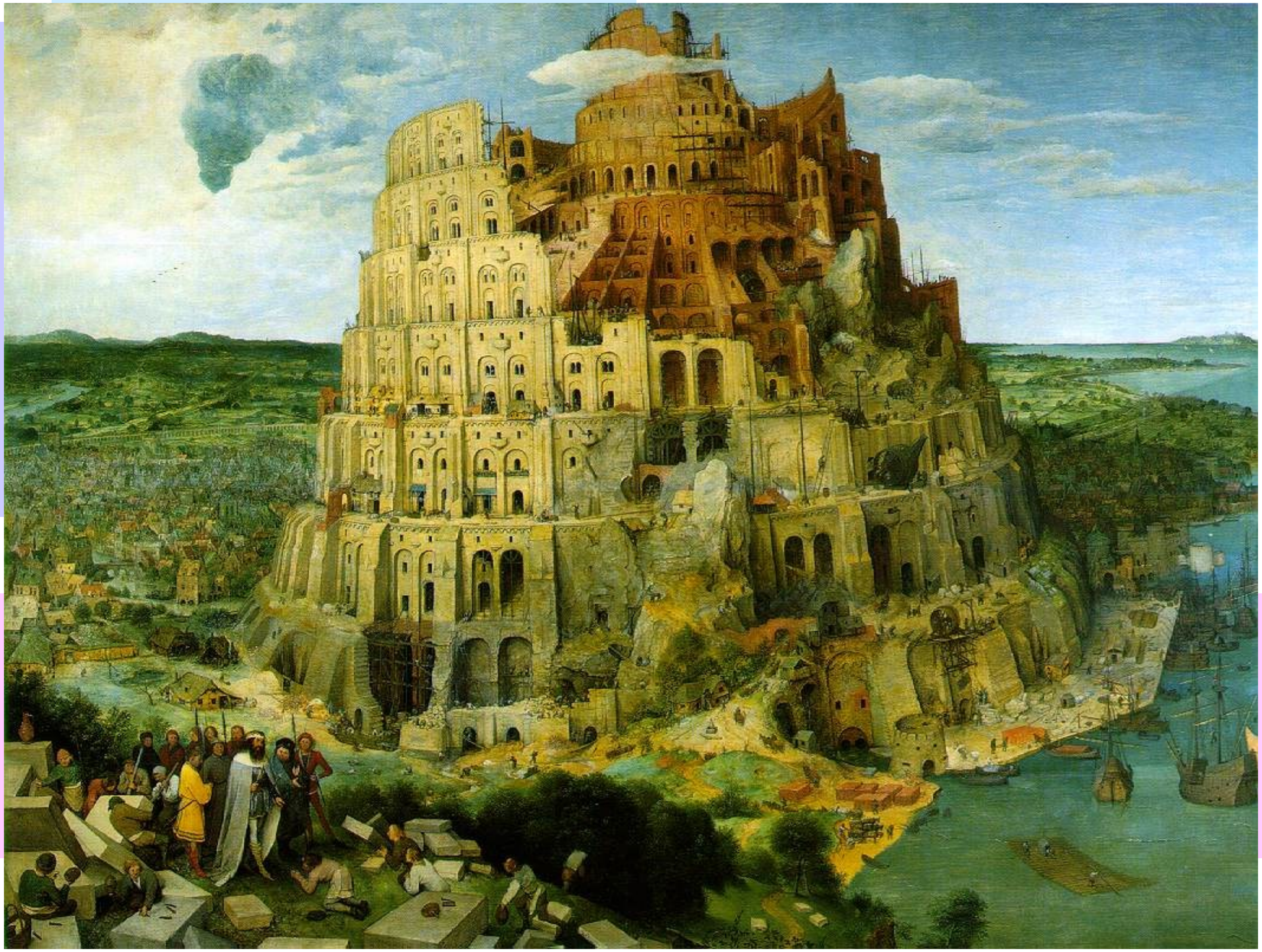
FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 5
Medios Materiales I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

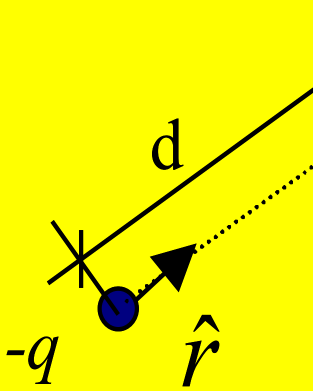
INDICE

- Clasificación y Modelamiento de medios materiales
- Materiales no Polares, polares
- Vector Polarización
- Potencial Eléctrico en la Materia
- Cargas de polarización
- Generalización 1a Ecuación de Maxwell
- Ejemplo



Pieter Bruegel,
La torrre de Babel, 1563

Previa: Dipolos

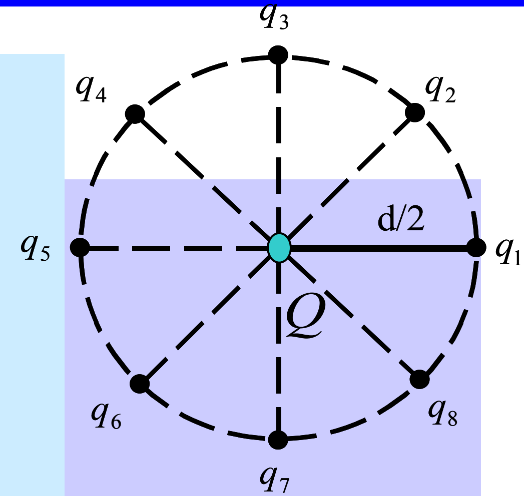


$$\vec{p} = qd\hat{r}$$

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

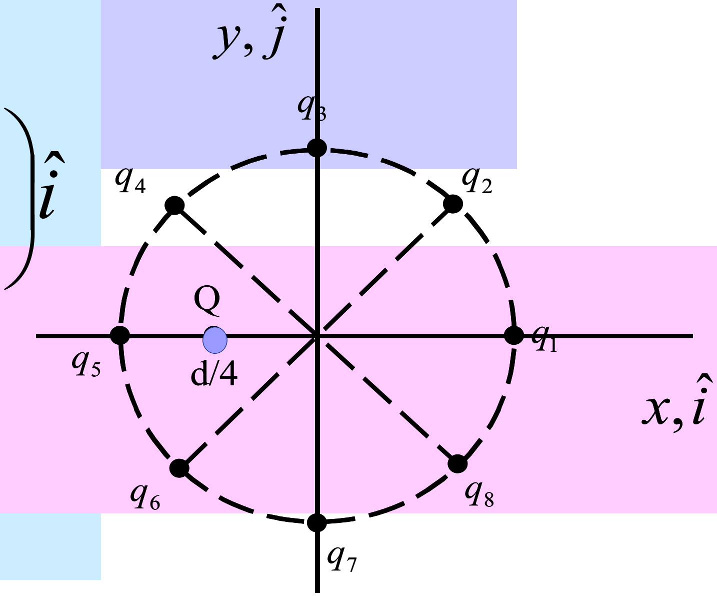
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{8} q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0$$

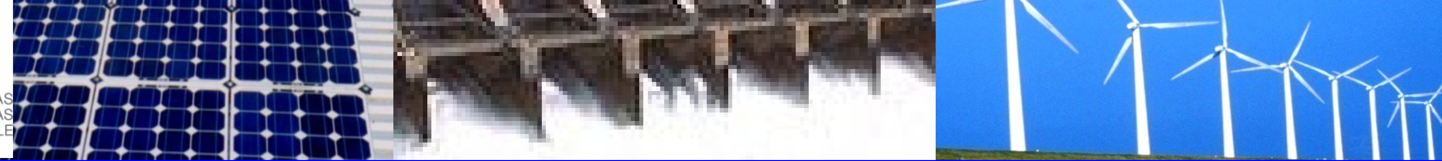
$$\Rightarrow \quad \vec{p} = 0$$



$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i - Q\left(\frac{d}{4}\right)\hat{i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = -Q\frac{d}{4}\hat{i}$$





MEDIOS MATERIALES

Dieléctricos o aislantes: las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)

Conductores: las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material (cobre, aluminio, tejido humano)

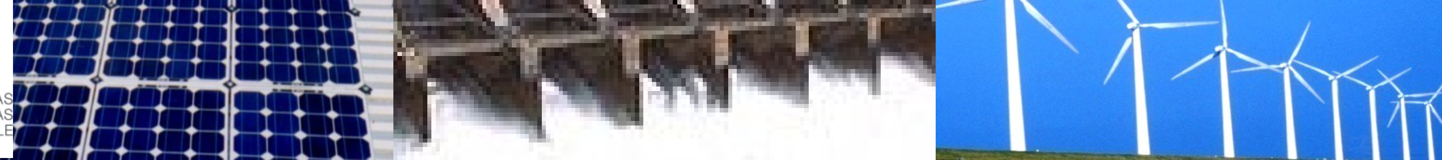
Semiconductores: un material que presenta un comportamiento no lineal en función del campo eléctrico aplicado (aleaciones sintéticas de silicio, germanio, etc.)

MEDIOS MATERIALES

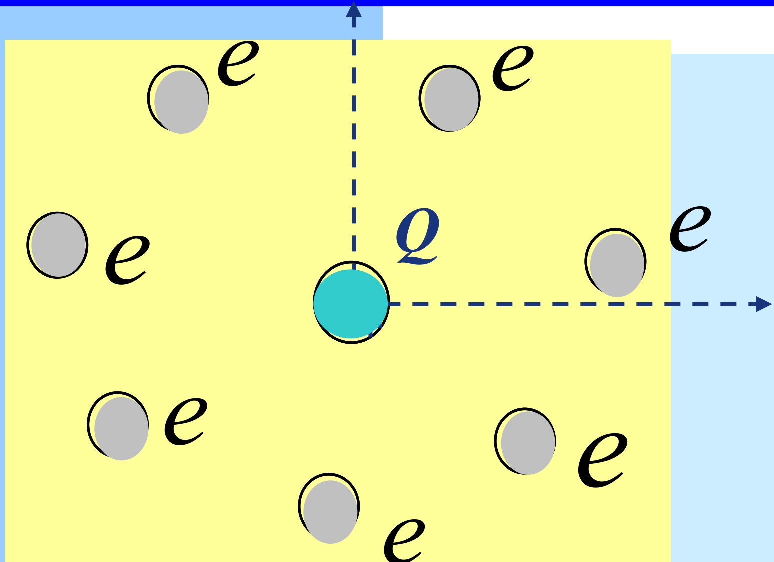
Dieléctricos o aislantes: las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)

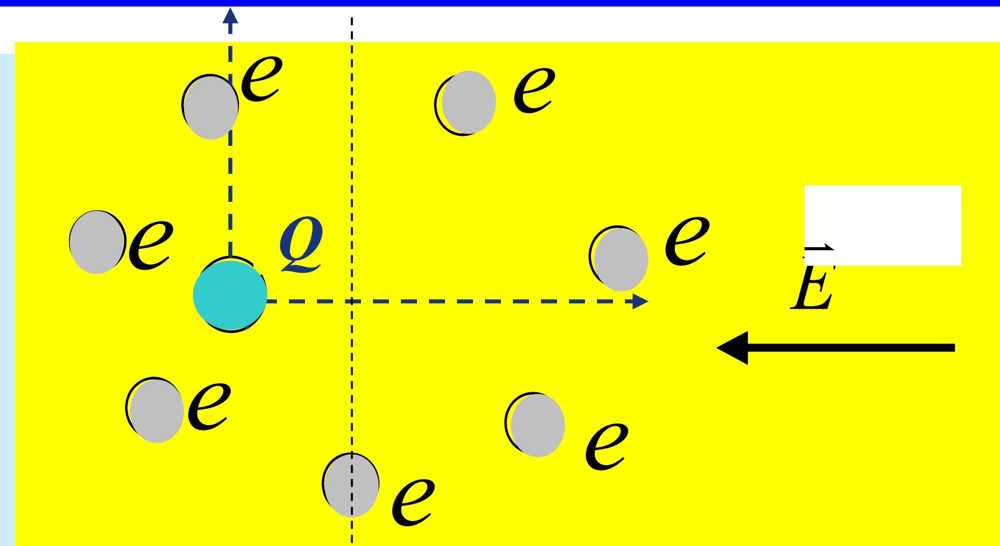
Materiales NO polares

Materiales polares



Materiales No Polares





Modelo de átomo simple

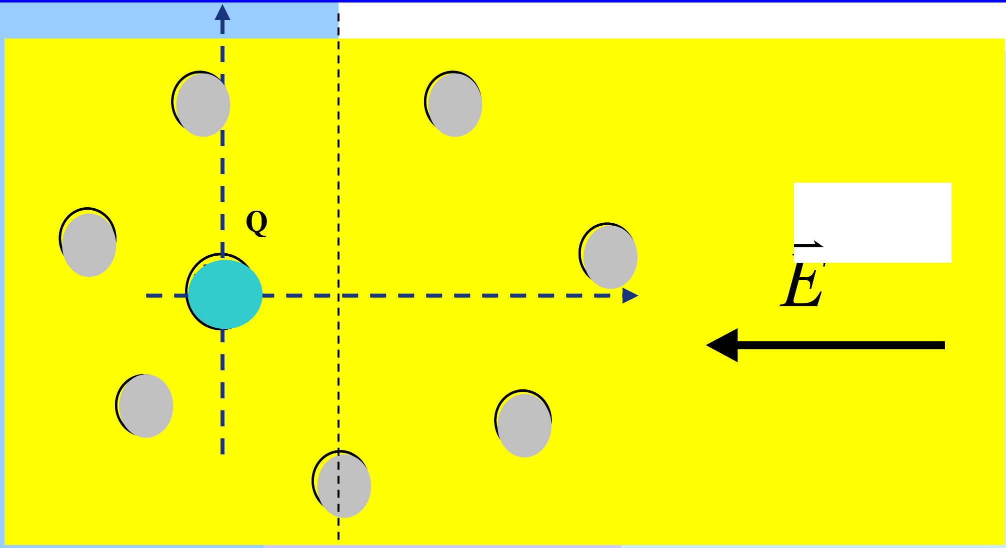
- Tiene simetría esférica
- Carga neta es nula

$$Q + \sum e = 0$$

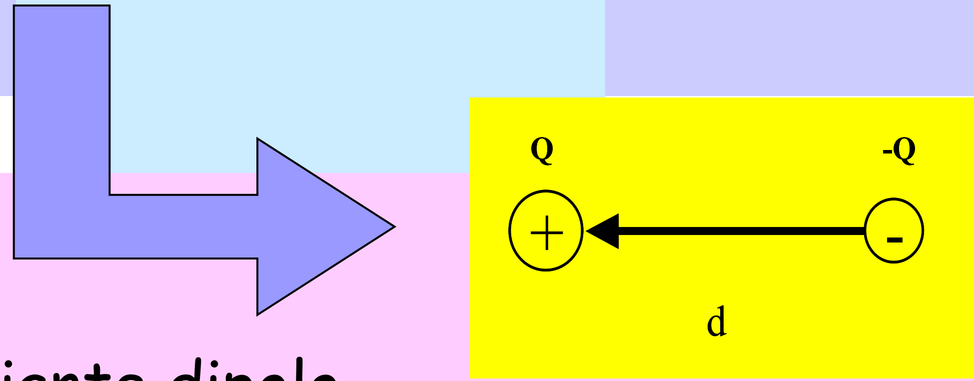
Deformación producida por campo aplicado:

- Se produce un pequeño desplazamiento en torno al punto de equilibrio
- Carga neta nula

Materiales No Polares



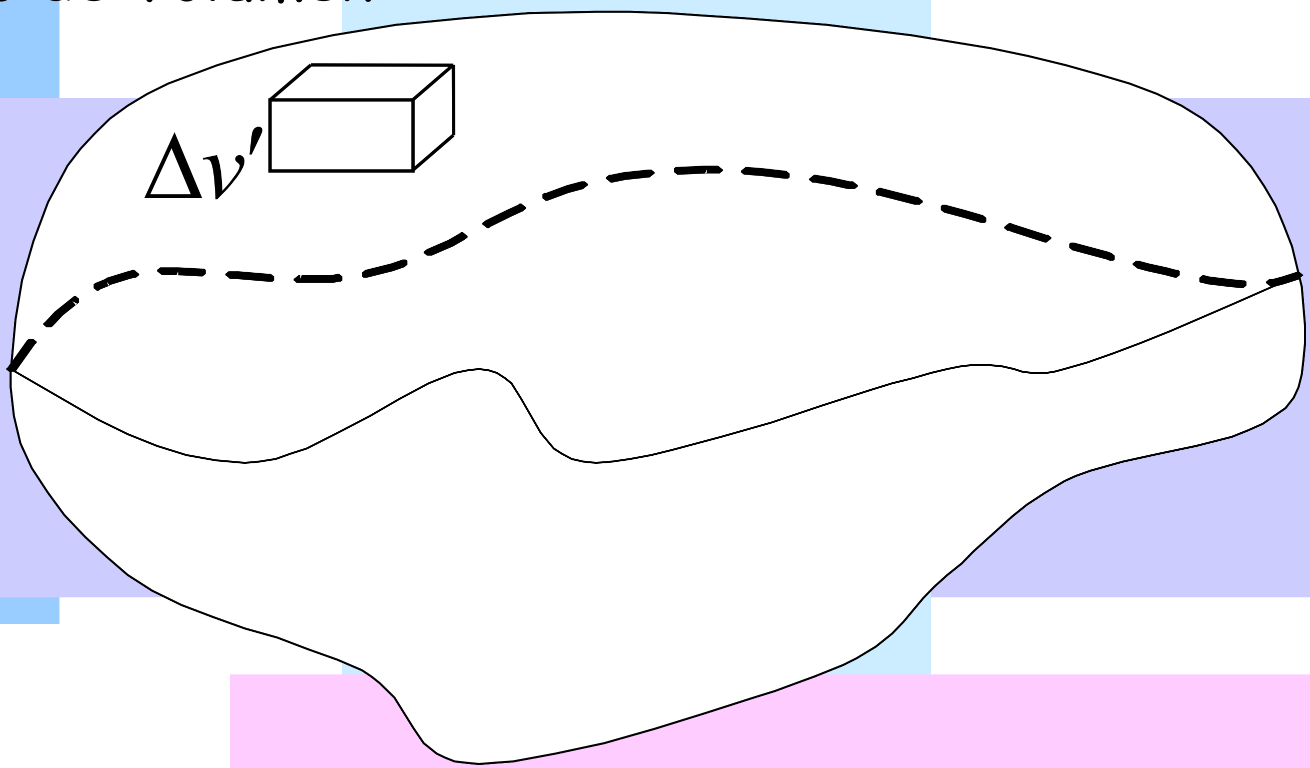
Deformación producida por campo aplicado



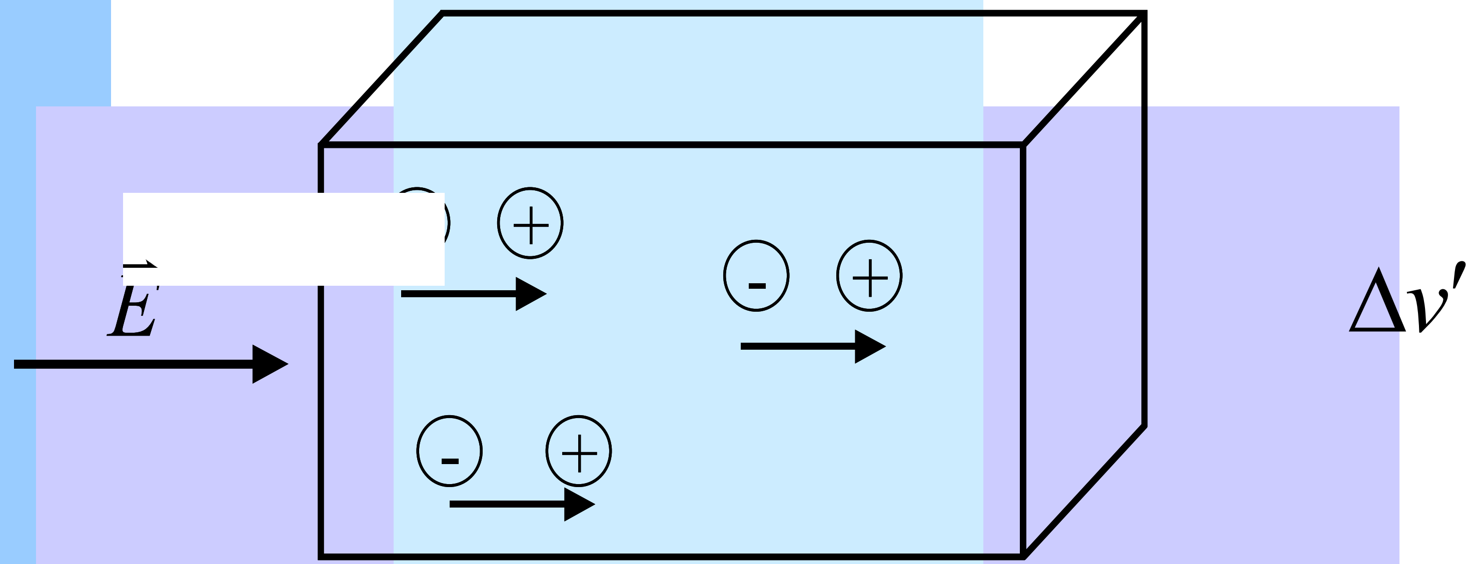
Representación mediante dipolo

Materiales No Polares

Elemento de Volumen



Materiales No Polares



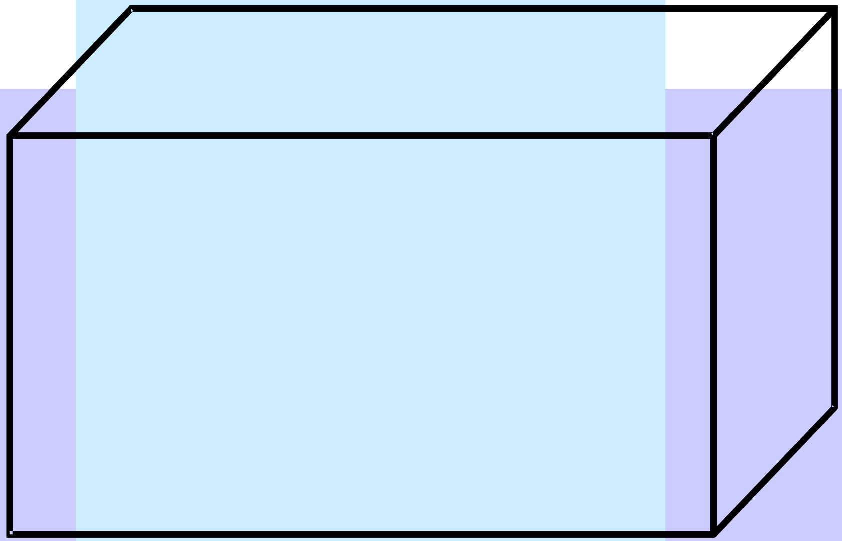
Al aplicar campo eléctrico:

- Aparecen dipolos en el medio material
- Carga neta permanece nula

Materiales No Polares

Elemento de Volumen

$$\vec{E} = 0$$

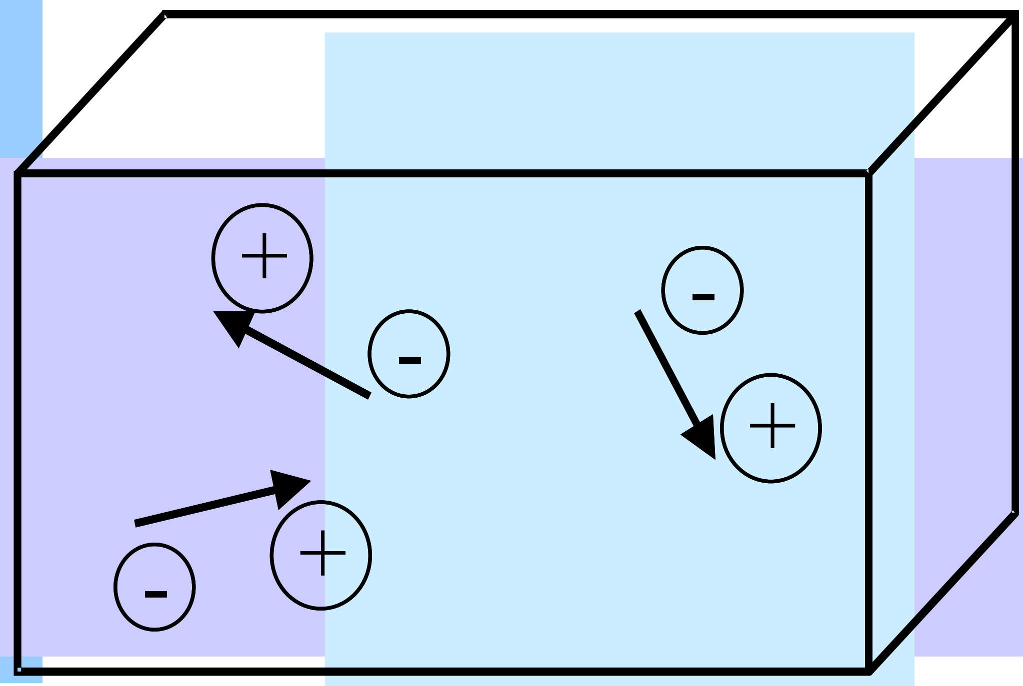


$$\Delta v'$$

El material no posee dipolos si no hay campo externo

Materiales Polares

$$\vec{E} = 0$$

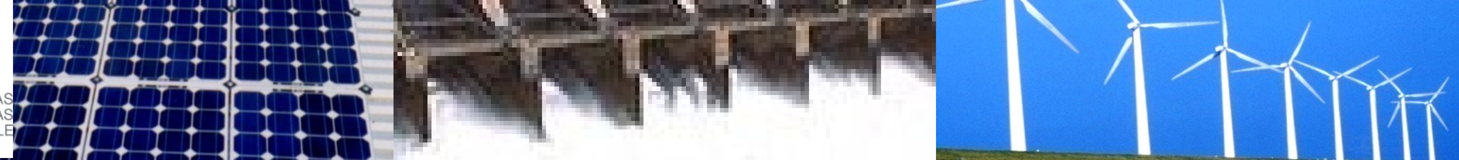


- Por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural
- Generalmente orientados en forma aleatoria
- Carga neta permanece nula

Modelo de los Materiales Dieléctricos

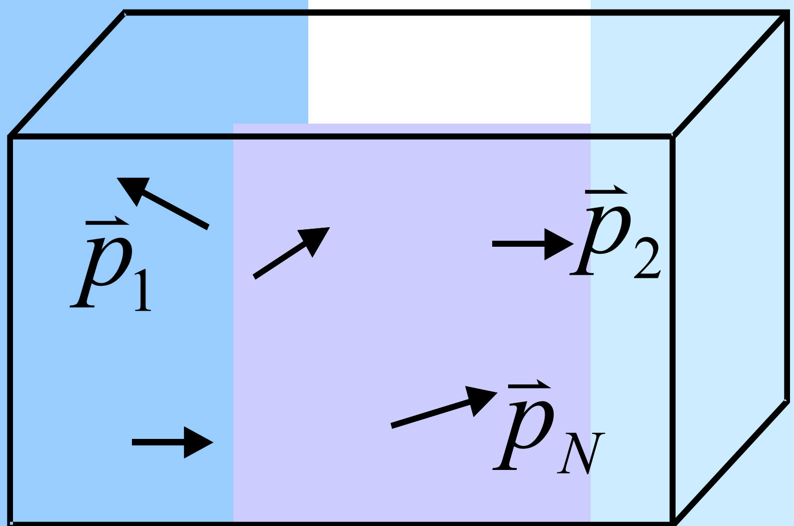
En resumen

- Cargas (electrones y protones) de los átomos o moléculas mantienen su ligazón y no pueden desplazarse libremente
- Sólo pueden producirse pequeños desplazamientos en torno a un punto de equilibrio fijo
- Carga neta nula
- Independiente si se trate de medios No Polares o de medios Polares, el material responde con formaciones de dipolos en su interior al aplicársele un campo eléctrico externo.
- En ausencia de campo eléctrico externo, en los medios No polares no hay dipolos, mientras que en lo polares si.



Vector Polarización

Elemento de Volumen

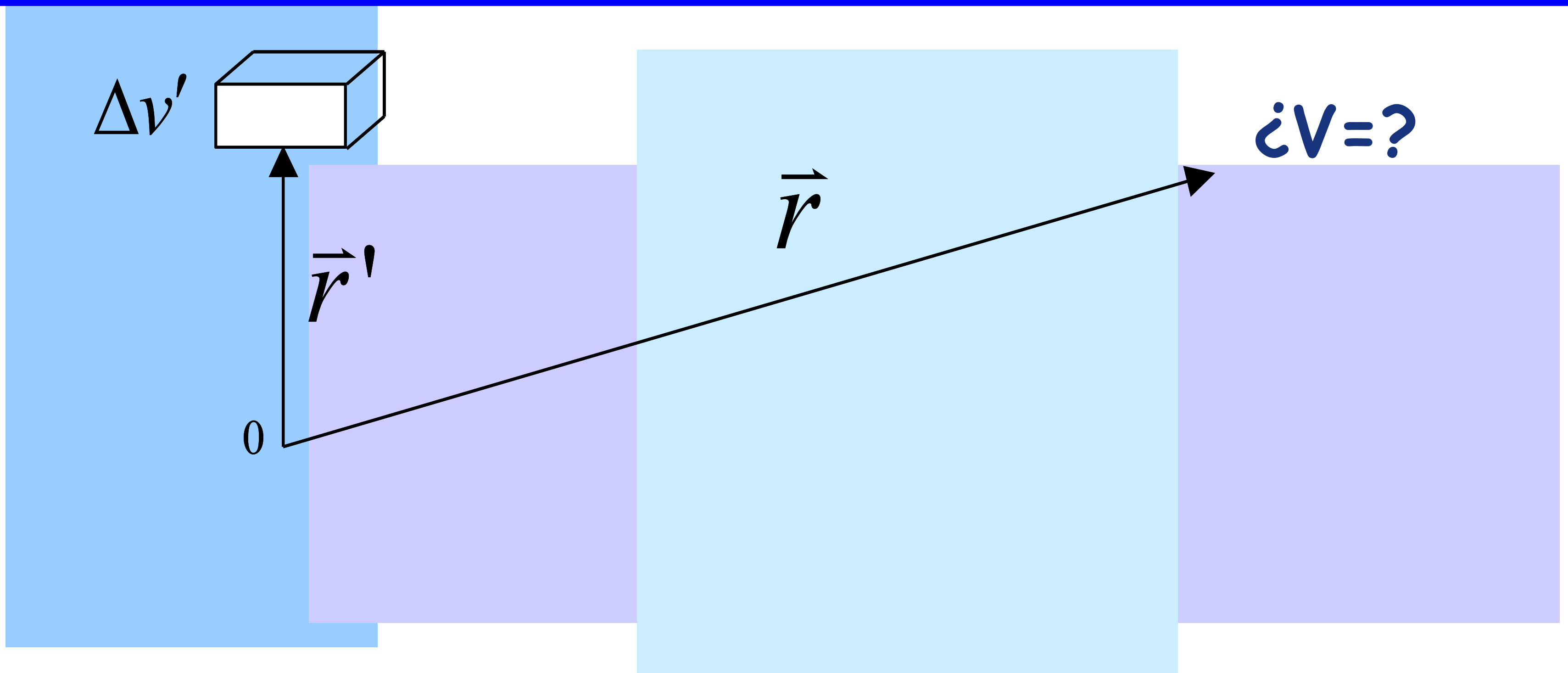


Vector Polarización

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \longrightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \to 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Dipolos por unidad de volumen [C/m2]

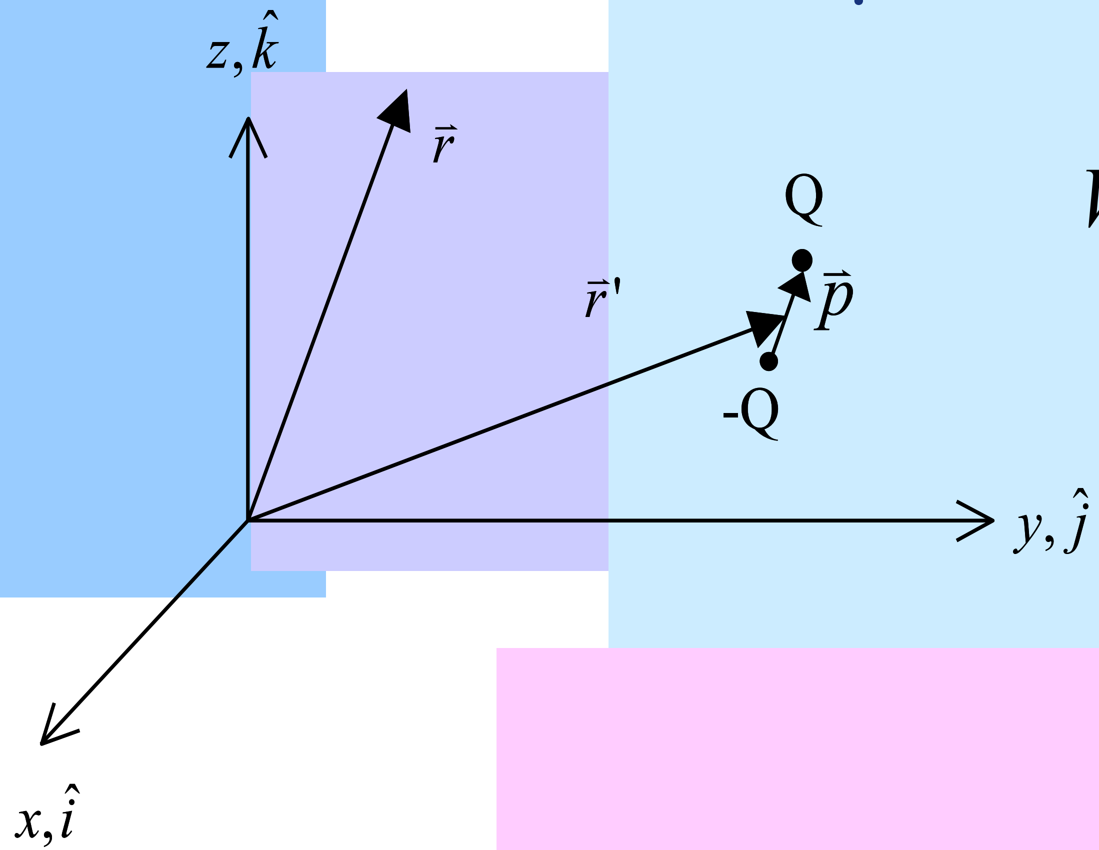
Potencial Eléctrico en la Materia



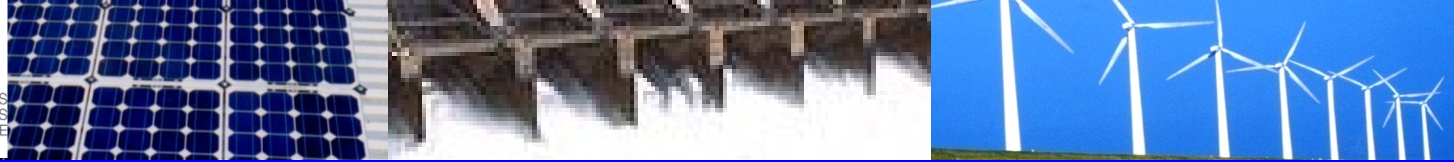
Primero calcularemos el potencial y campo producido por un Elemento de Volumen del medio material, el cual está caracterizado por un vector de Polarización

Potencial Eléctrico en la Materia

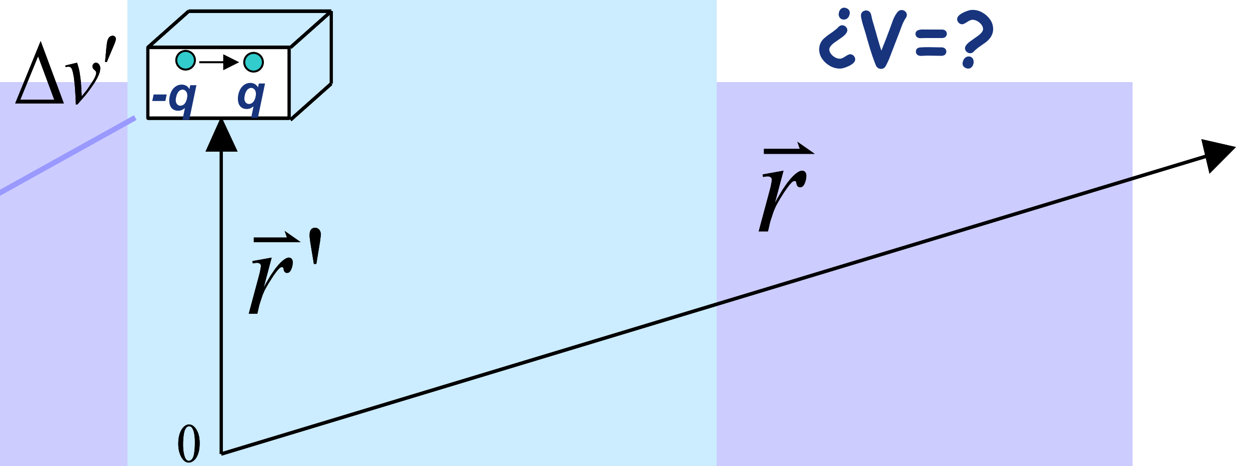
Recordemos el potencial de un dipolo



$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3}$$



Potencial Eléctrico en la Materia



$$d\vec{p} = \vec{P}\cdot\Delta v'$$

Dipolo equivalente

$$dV(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}\bullet(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \,\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Potencial Eléctrico en la Materia

$\vec{P}$:Vector polarización

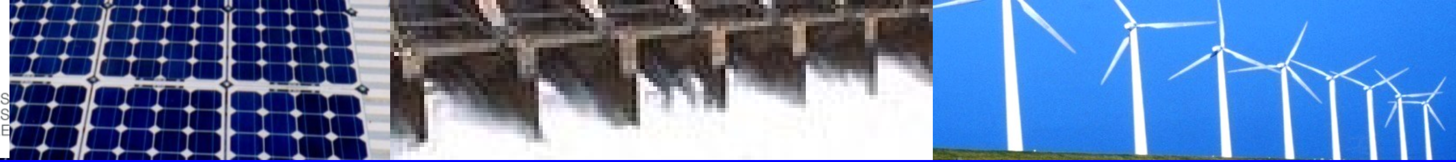
$$dV = \frac{\vec{P}\Delta v' \bullet (\vec{r} - \vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}\|} \qquad (2.1)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\;}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r} - \vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r}\|} \qquad (2.2)$$

Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad $\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$ (2.3)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \vec{P} \bullet \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad $\nabla \bullet f\vec{A} = f\,\nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$

$$\nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right] \dots \frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \nabla' \dots \left[\frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right] \qquad (2.5)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{\dots}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \left\{ \nabla' \bullet \left[\frac{\vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right] \dots \frac{1}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \nabla' \dots \right\} dv' \qquad (2.6)$$

$$\therefore \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \nabla' \bullet \left(\frac{\vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right) dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \left(-\frac{\nabla' \bullet \vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|} \right) dv'$$

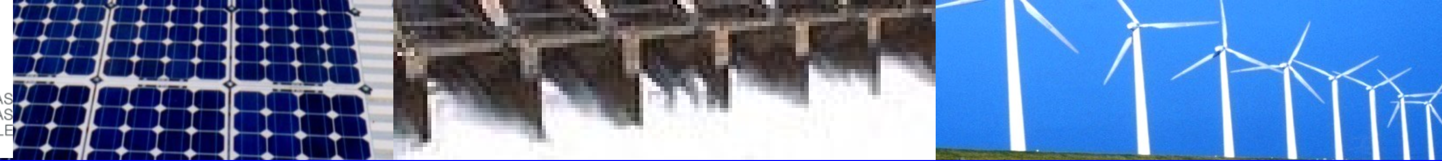
Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad $\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{A} dv = \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{A} \bullet d\vec{s}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet d\vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

Escribiendo $\vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot \hat{n} ds$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$



Potencial Eléctrico en la Materia

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} dv'$$

Tiene la forma

$$V_S(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S} \frac{\sigma(\vec{r}\,')ds'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

donde

$$\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_P(\vec{r}\,') = \vec{P}(\vec{r}\,') \bullet \hat{n}$$

Potencial Eléctrico en la Materia

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'}$$

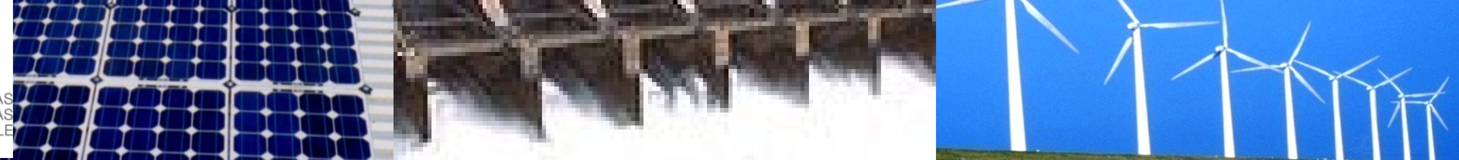
También tiene la forma

$$V_\Omega(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho_P(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

donde

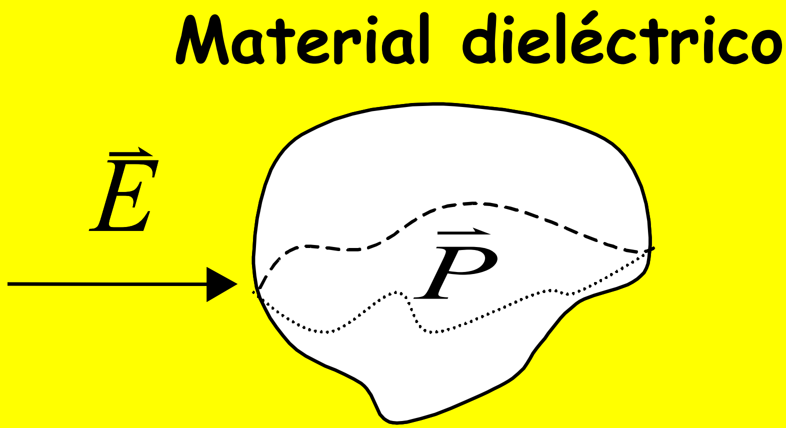
$$-\nabla' \bullet \vec{P}(\vec{r}') = \rho_P(\vec{r}')$$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

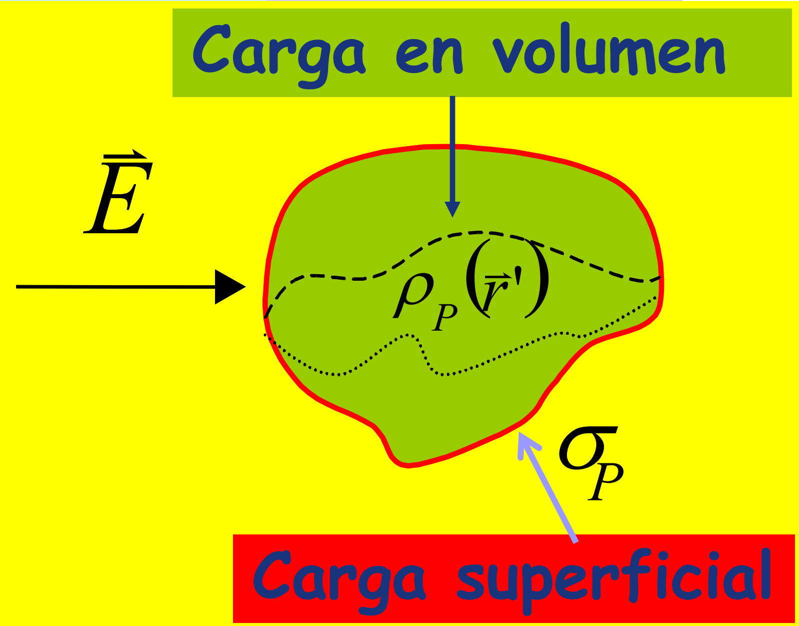


Cargas de polarización

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\sigma_P(\vec{r}')ds'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|} dv'$$



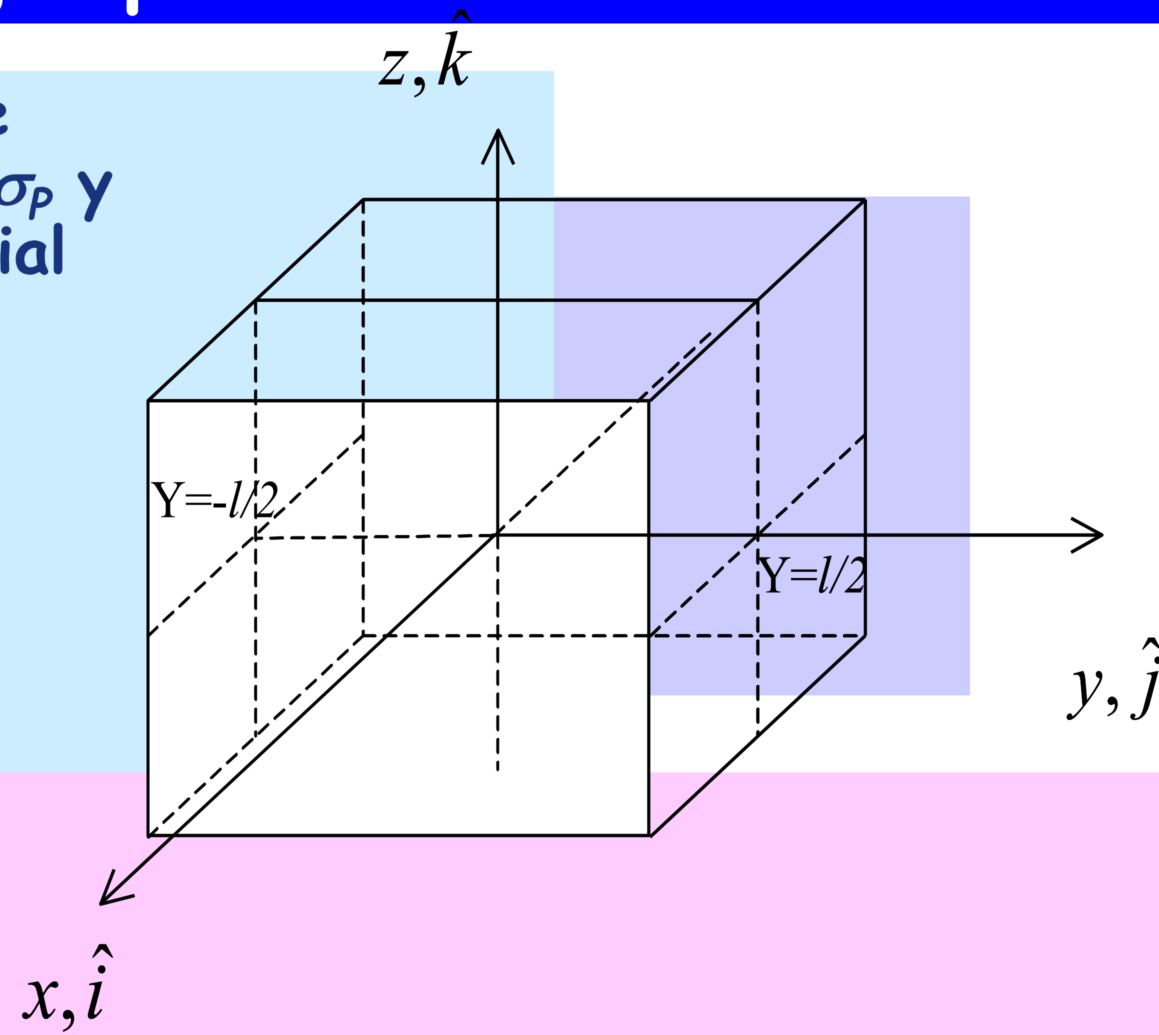
$\Leftrightarrow$



Ejemplo

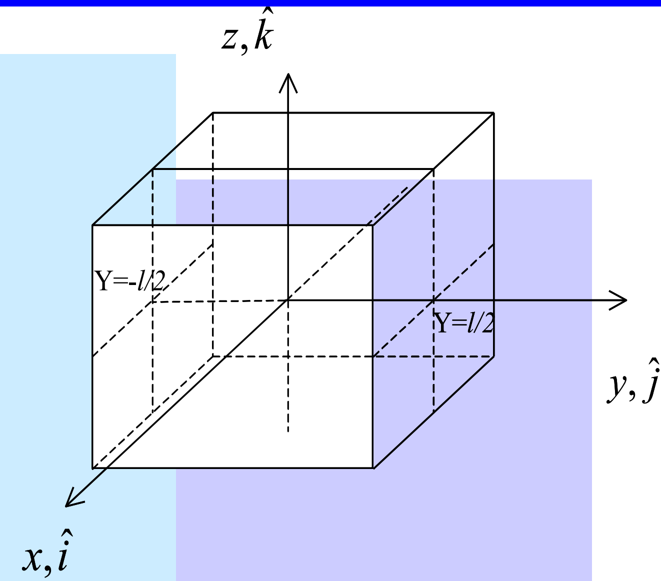
Calcular densidades de carga de polarización σ_P y ρ_P si el cubo de material posee una polarización dada por el vector

$$\vec{P} = a\vec{r}$$



Ejemplo

Calcular densidades de carga de polarización σ_P y ρ_P si $\vec{P} = a\vec{r}$

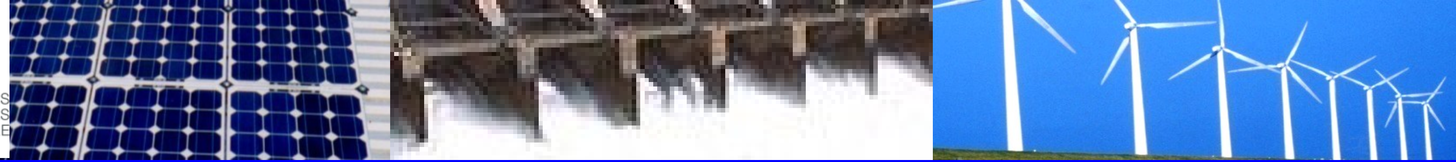


Sol^n:

- En volumen $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}\,[c/m^3]$

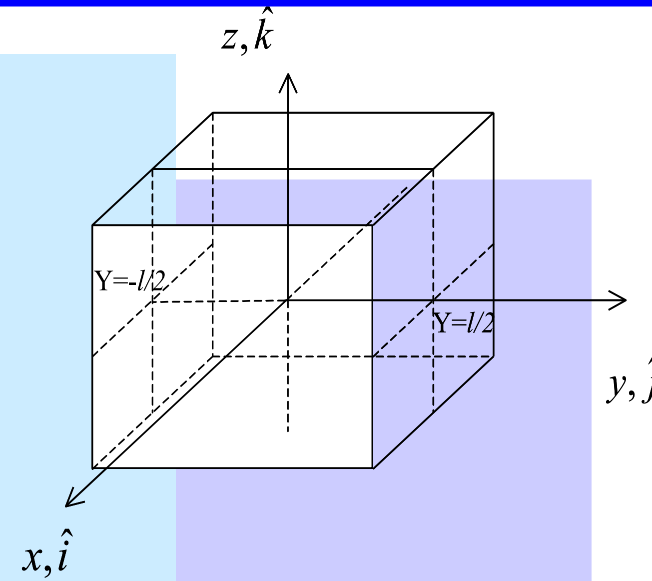
$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(ax\hat{i} + ay\hat{j} + az\hat{k}\right)$$

$$\rho_P = -(a + a + a) = -3a[c/m^3]$$



Ejemplo

Calcular densidades de carga de polarización σ_P y ρ_P si $\vec{P} = a\vec{r}$



Sol^n:

- **En superficie** $\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} \quad [c/m^2]$

Plano x-z, para y=l/2 $\quad \hat{n} = \hat{j} \Rightarrow \vec{P}\cdot\hat{n} = (ax\hat{i} + a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k})\cdot\hat{j} = \frac{al}{2}$

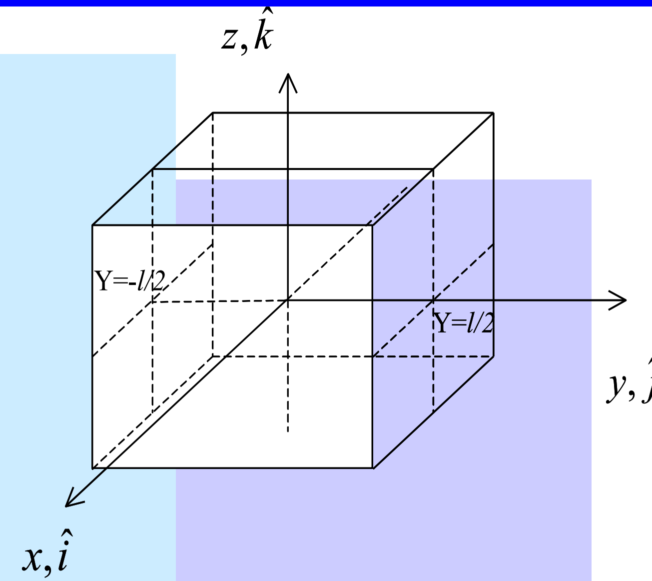
Plano x-z, para y=-l/2 $\quad \hat{n} = -\hat{j} \Rightarrow \vec{P}\cdot\hat{n} = \left(ax\hat{i} + -a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k}\right)\cdot(-\hat{j}) = \frac{al}{2}$

Similarmente para las otras caras se tiene $\sigma = \frac{al}{2}$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejemplo

Calcular densidades de carga de polarización σ_P y ρ_P si $\vec{P} = a\vec{r}$



Sol^n:

- Carga al interior del cubo

$$\iiint_V \rho_P dV = -3al^3 \Rightarrow Q_T = -3al^3$$

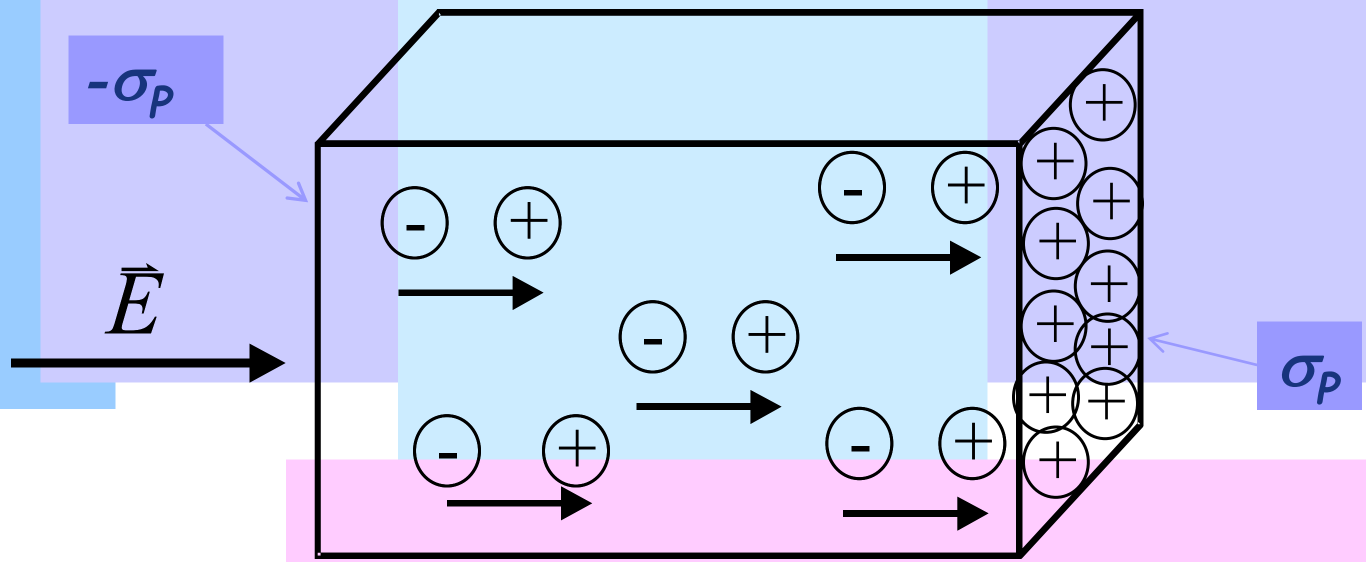
- Carga en las caras

Por cada cara $\sigma l^2 \Rightarrow Q_{cara} = \frac{al^3}{2} \qquad \Rightarrow Q_{caras} = 3al^3$

- Carga total de polarización $Q = Q_T + Q_{caas} = -3al^3 + 3al^3 = 0$

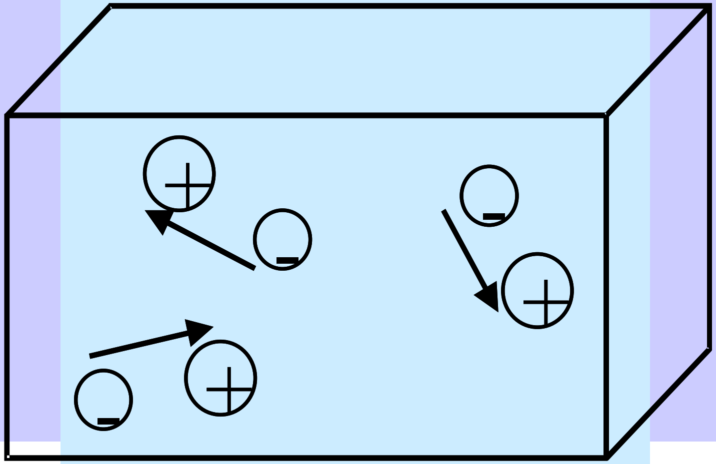
Propiedades de cargas de polarización

- Cargas de σ_P y ρ_P obedecen a la alineación que experimentan los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.



Propiedades de cargas de polarización

- Las cargas de ρ_P y σ_P no se mueven (se obtienen de la "rotación" de los dipolos).



Propiedades de cargas de polarización

- Carga neta de polarización es nula

$$\iiint_{\Omega} \rho_P(\vec{r}')dv' + \oiint_{S(\Omega)} \sigma_P(\vec{r}')ds' = \iiint_{\Omega} -\nabla' \cdot P dv' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}'$$

$$= -\oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s}'$$

$$= 0$$

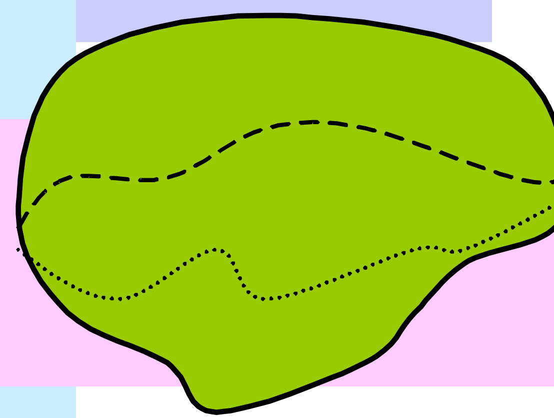
Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

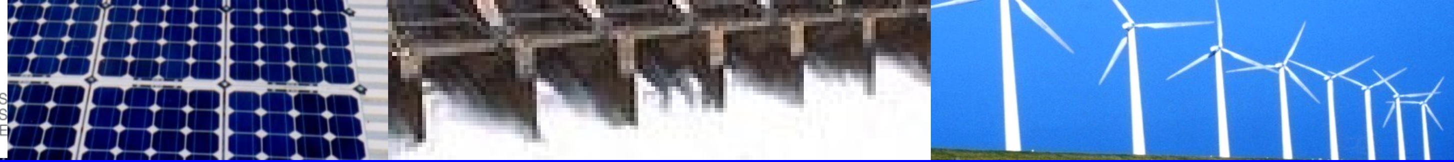
Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$





Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

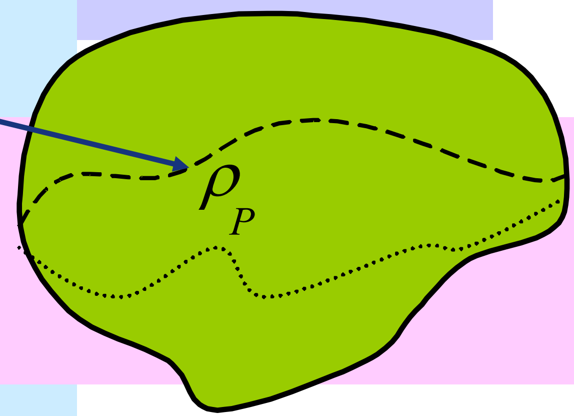
Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen



Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

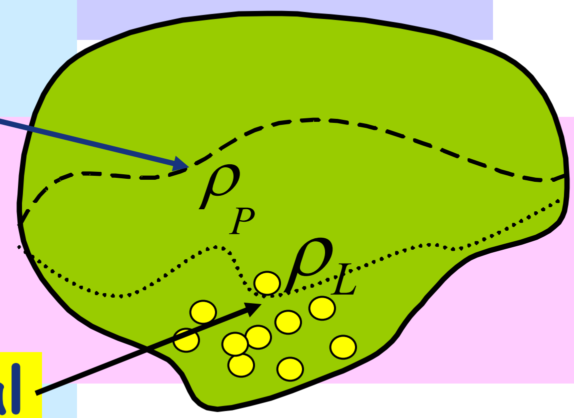
Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen

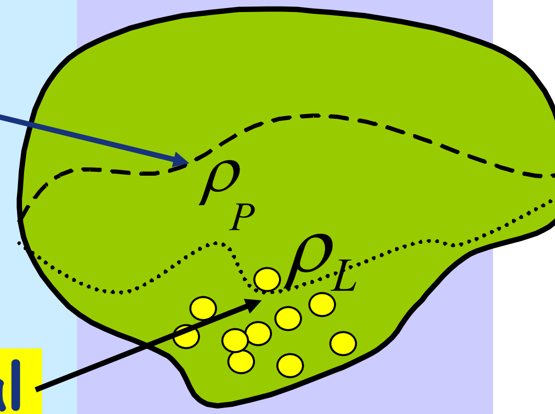


Carga libre en el interior del material

Generalización 1a Ecuación de Maxwell

Caso general: Hay distribución de cargas libre ρ_L al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización ρ_P

Carga de polarización en volumen



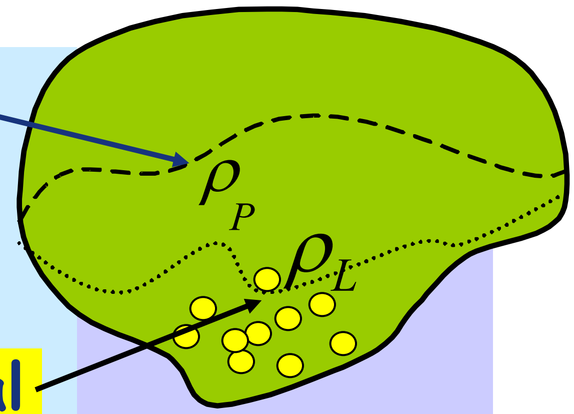
Carga libre en el interior del material

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$ **, ya que las fuentes del campo eléctrico son TODAS las cargas**

Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen



Carga libre en el interior del material

$$\rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$

pero $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$

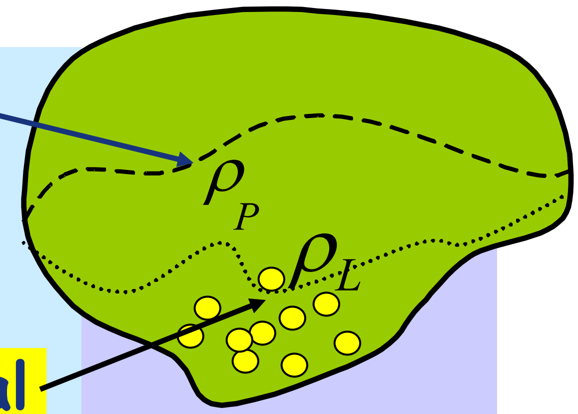
$$\Rightarrow \quad \rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \qquad (2.18)$$

$$\rho_L = \nabla \cdot \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{} \qquad (2.19)$$

Definición Vector desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

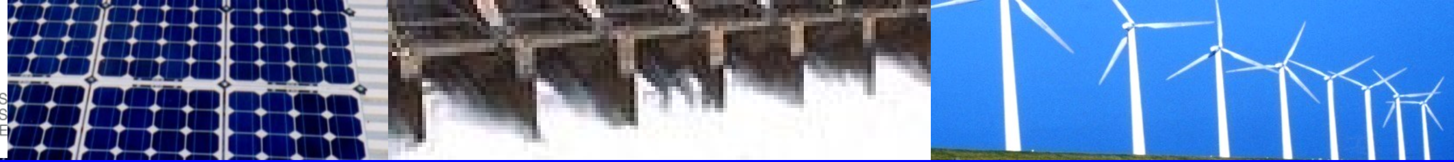


Carga libre en el interior del material

$$\rho_L = \nabla \bullet \underbrace{\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}$$

Definición Vector desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

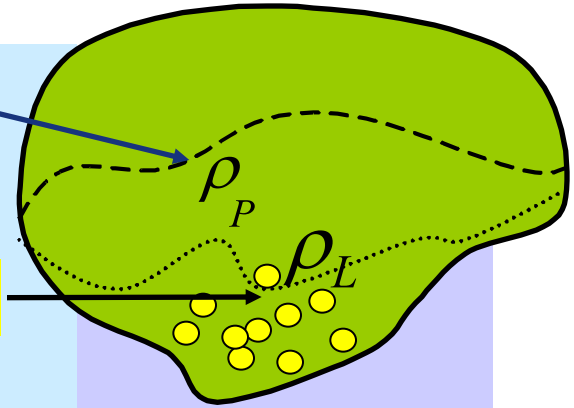
O sea, $\vec{D}$ está desplazado con respecto al campo eléctrico $\vec{E}$ por el vector polarización $\vec{P}$



Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

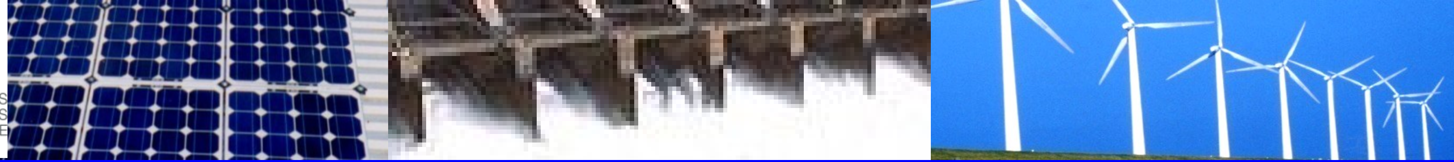
Carga libre en el interior del material



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \boxed{\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D}}$$

1ª Ecuación de Maxwell

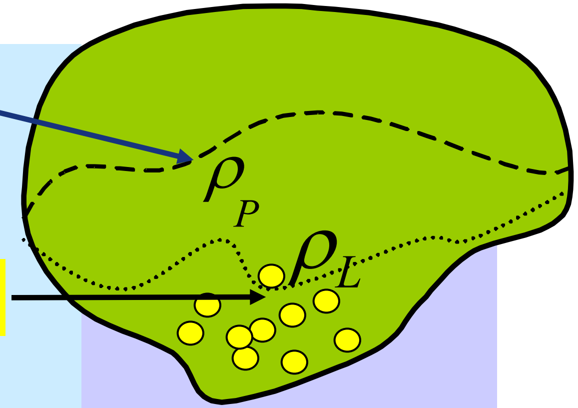
- Las fuentes del vector desplazamiento $\vec{D}$ son exclusivamente las cargas libres
- Líneas de campo vectorial $\vec{D}$ nacen en cargas positivas y mueren en cargas negativas LIBRES.



Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \boxed{\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D}}$$

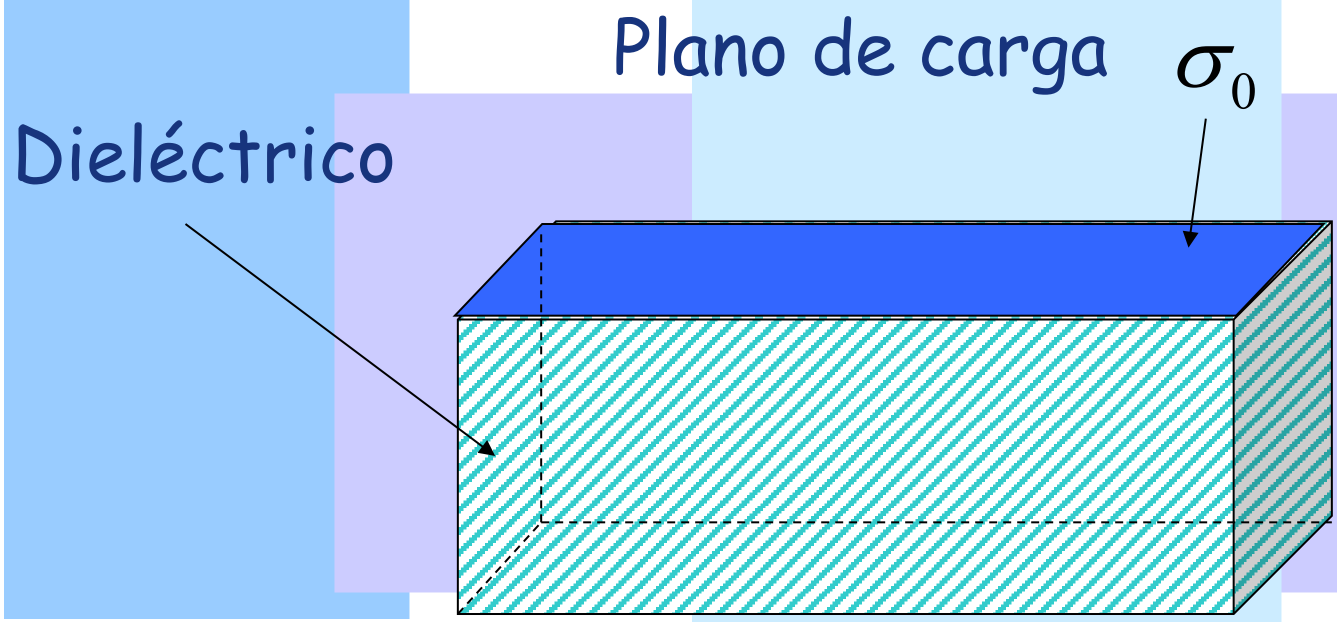
1ª Ecuación de Maxwell

Fuentes de vector desplazamiento son sólo las cargas libres

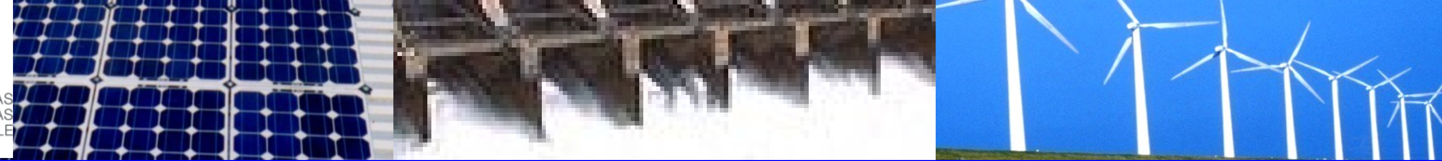
Integrando
$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L \, dv}_{Q_{TOTAL}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{D} \, dv}_{\oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}} \Rightarrow \boxed{\oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{TOTAL}}$$

Ley de Gauss en medios materiales

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

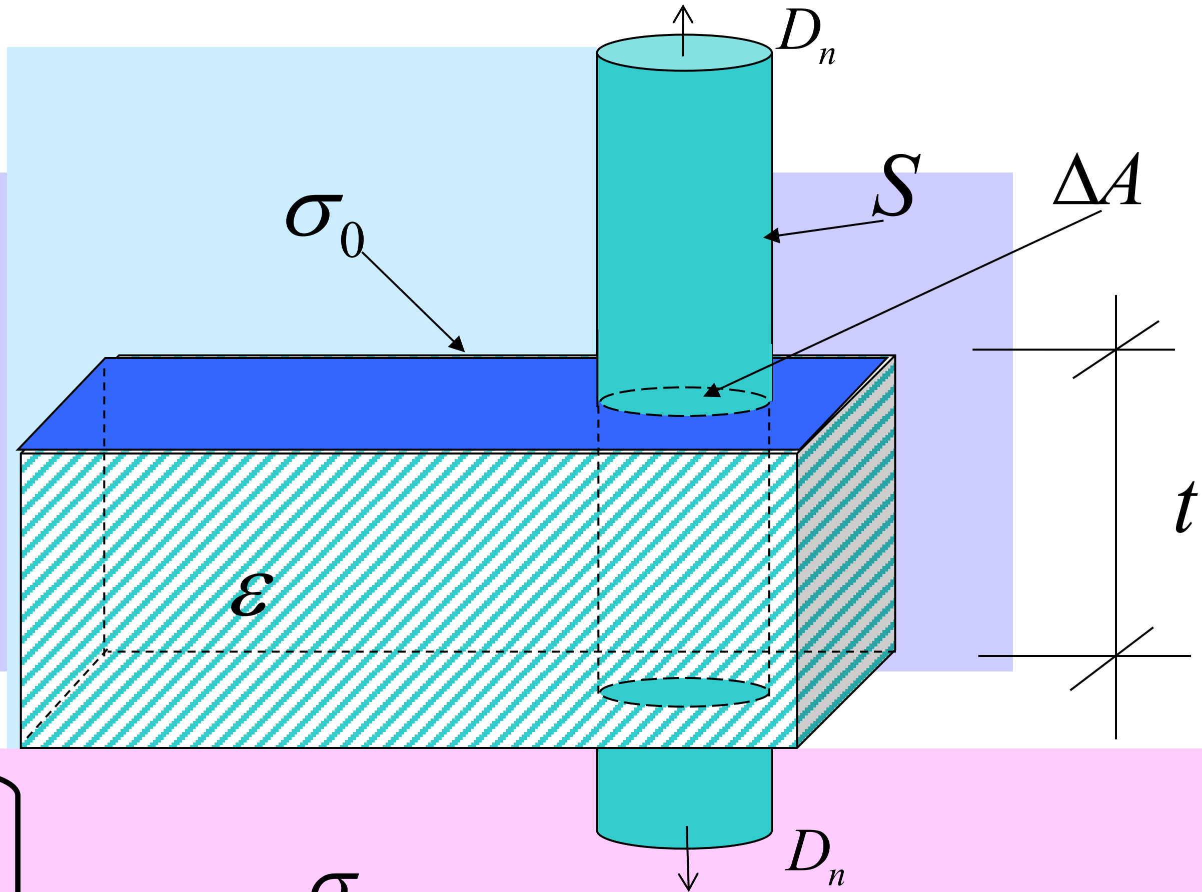


Calcular campos si se sabe que la relación entre campos eléctricos y de desplazamiento es lineal, es decir, se cumple $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (medio material lineal)



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Plano de carga (infinito)



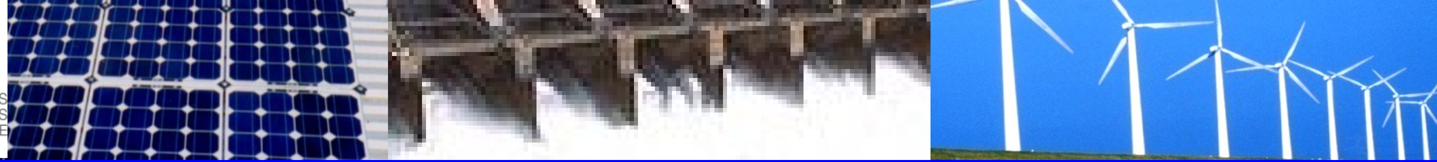
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_T$$

$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2 \Delta A D_n$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_T = \Delta A \sigma_0 \\ \oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2 \Delta A D_n \end{array}\right\} D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

Fuentes de $\vec{D}$ son sólo cargas libres

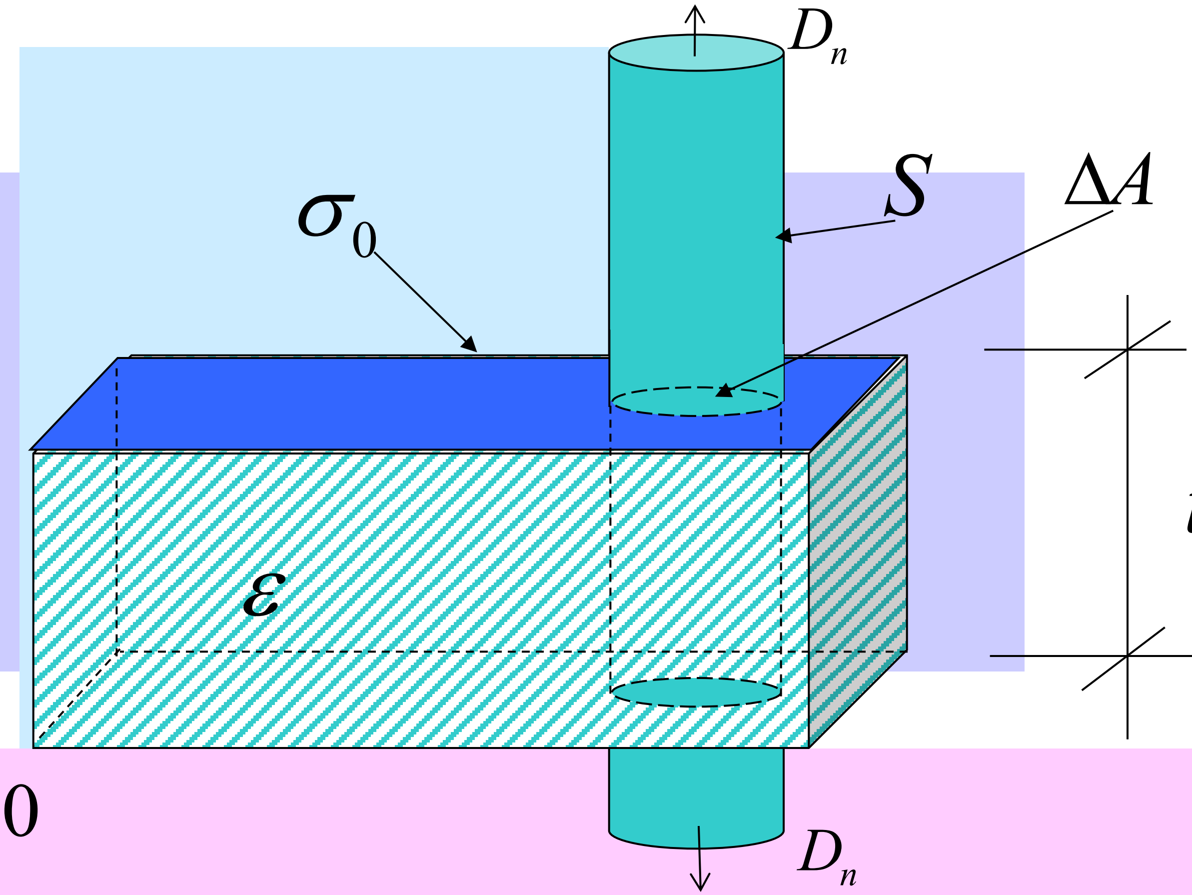


Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

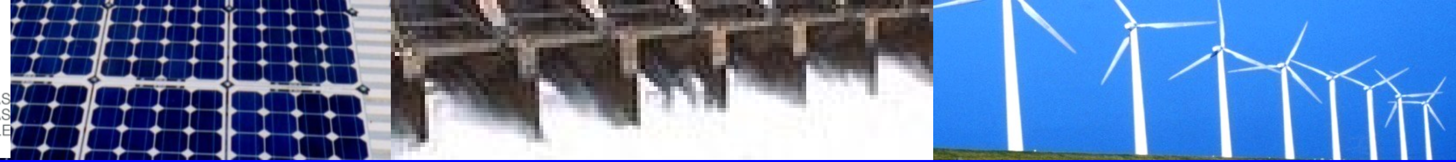
Plano de carga (infinito)

$$D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

Fuentes de $\vec{D}$ son sólo cargas libres



$$\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z > 0 \\ -\dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z < -t \end{cases}$$

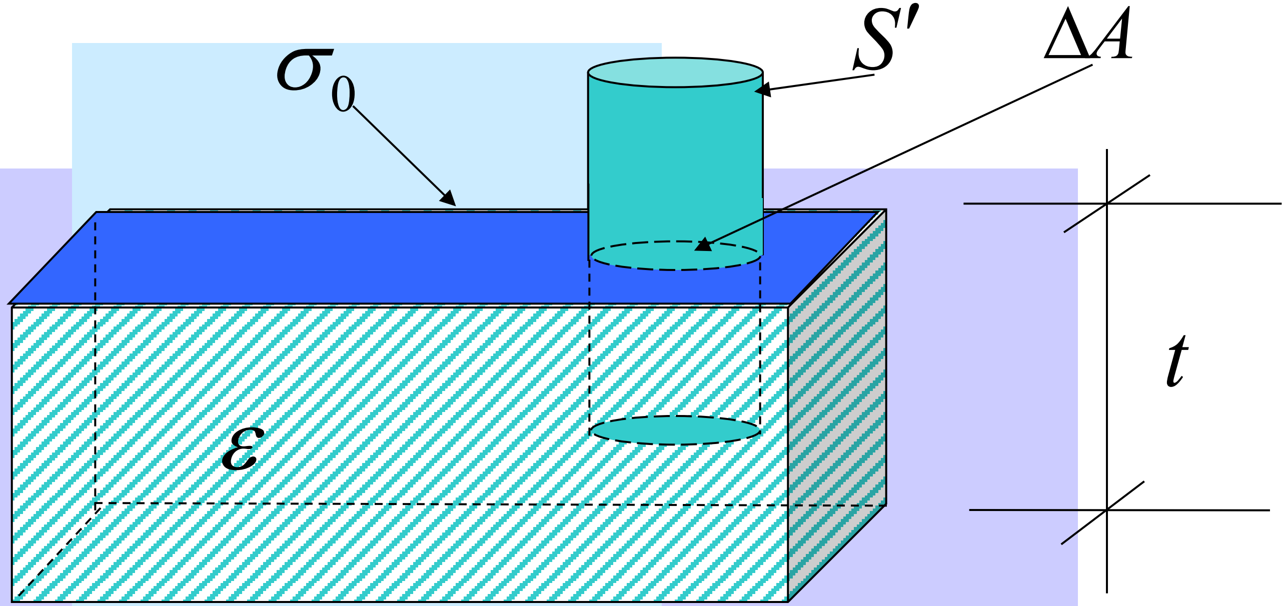


Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\oiint_{S'} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_T$$

$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_{S'} \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$



$$\Rightarrow 2\Delta A D_n = \Delta A \sigma_0$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z > 0 \\ -\dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z < 0 \end{cases}$$

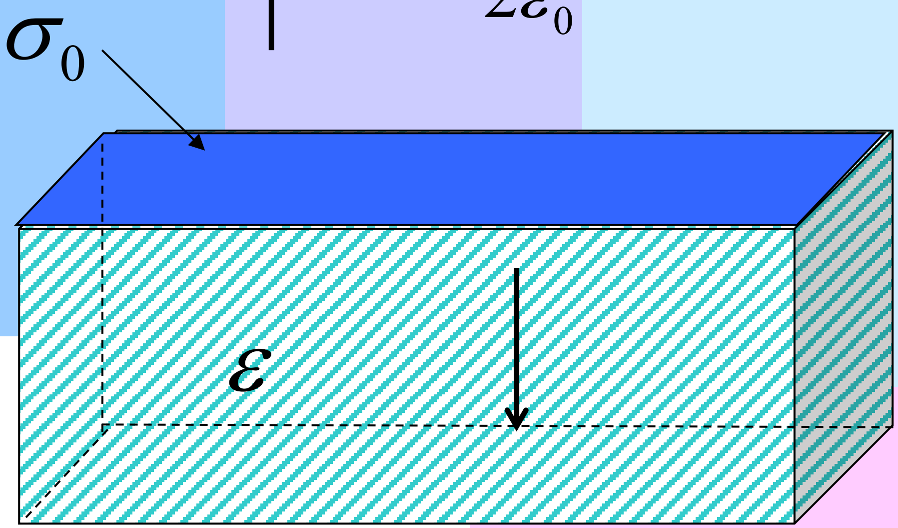
Fuentes de $\vec{D}$ son sólo cargas libres

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Campo Eléctrico fuera del medio

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$



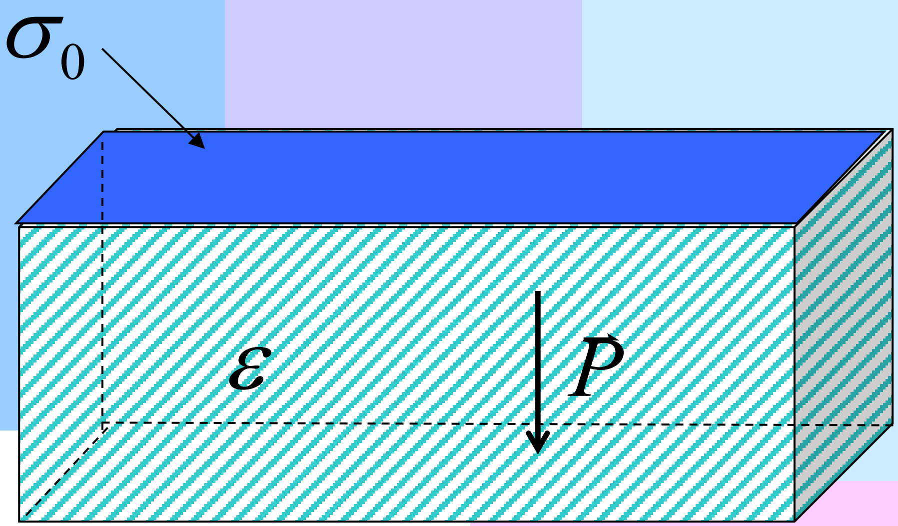
Al interior del medio material $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\hat{k}$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

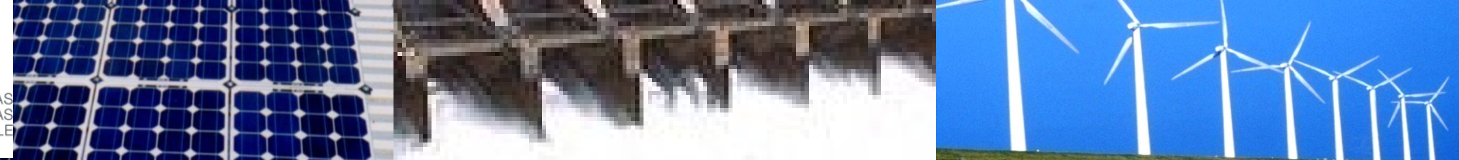
Vector polarización $\vec{P}$



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

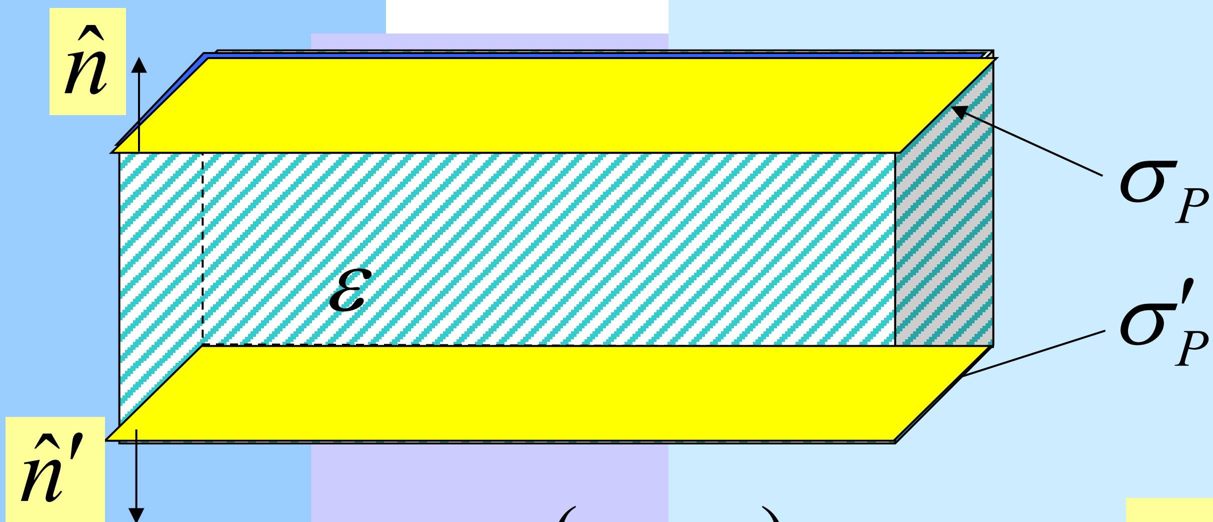
$$\Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k}$$



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material $\vec{P} = -\dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k}$

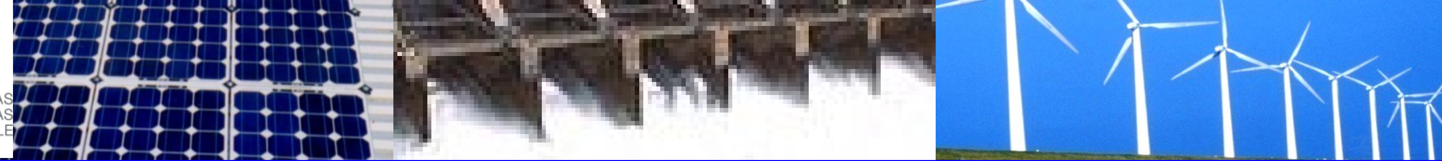


Hay cargas de polarización

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k} \bullet \hat{k} \Rightarrow \sigma_P = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0$$

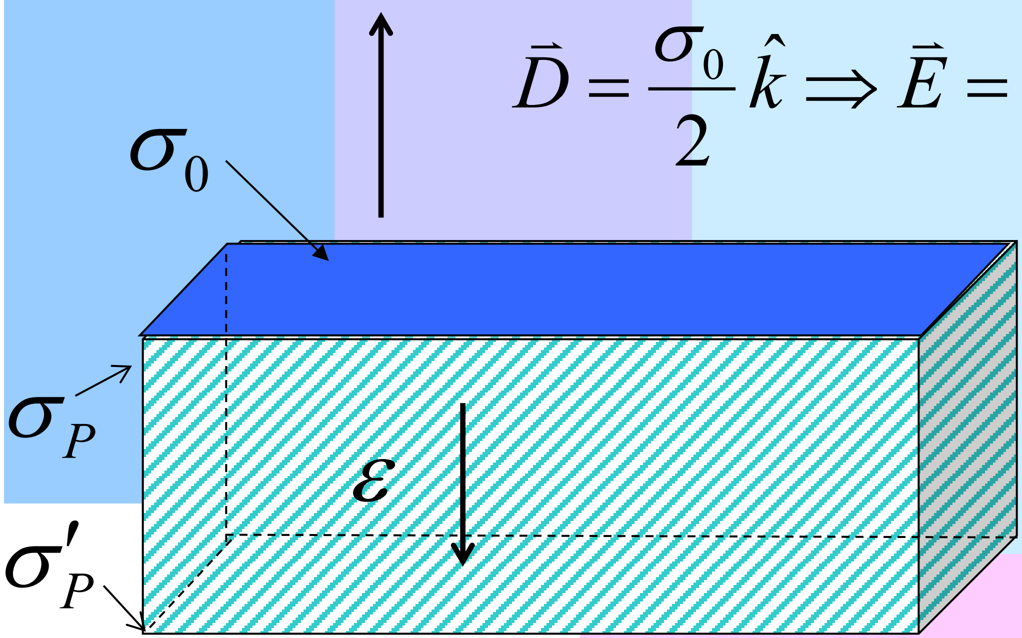
$$\sigma'_P = \vec{P} \bullet \hat{n}' = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k} \bullet -\hat{k} \Rightarrow \sigma'_P = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0$$

Si $\sigma_0 > 0$ entonces $\sigma_P < 0 \quad y \quad \sigma'_P > 0$



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

En resumen



$$\vec{D} = \frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 1

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\hat{k}$$

$$\vec{P} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0\hat{k}$$

Zona 2

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 3