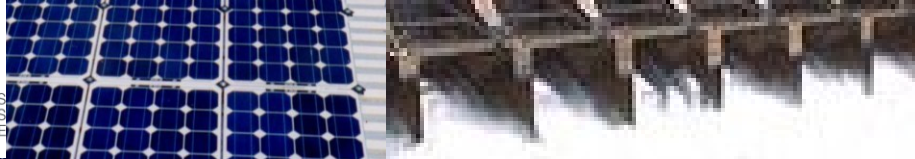


FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 4

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

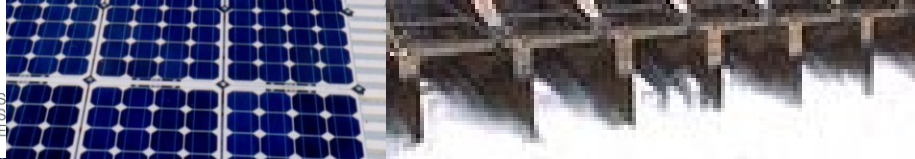


INDICE

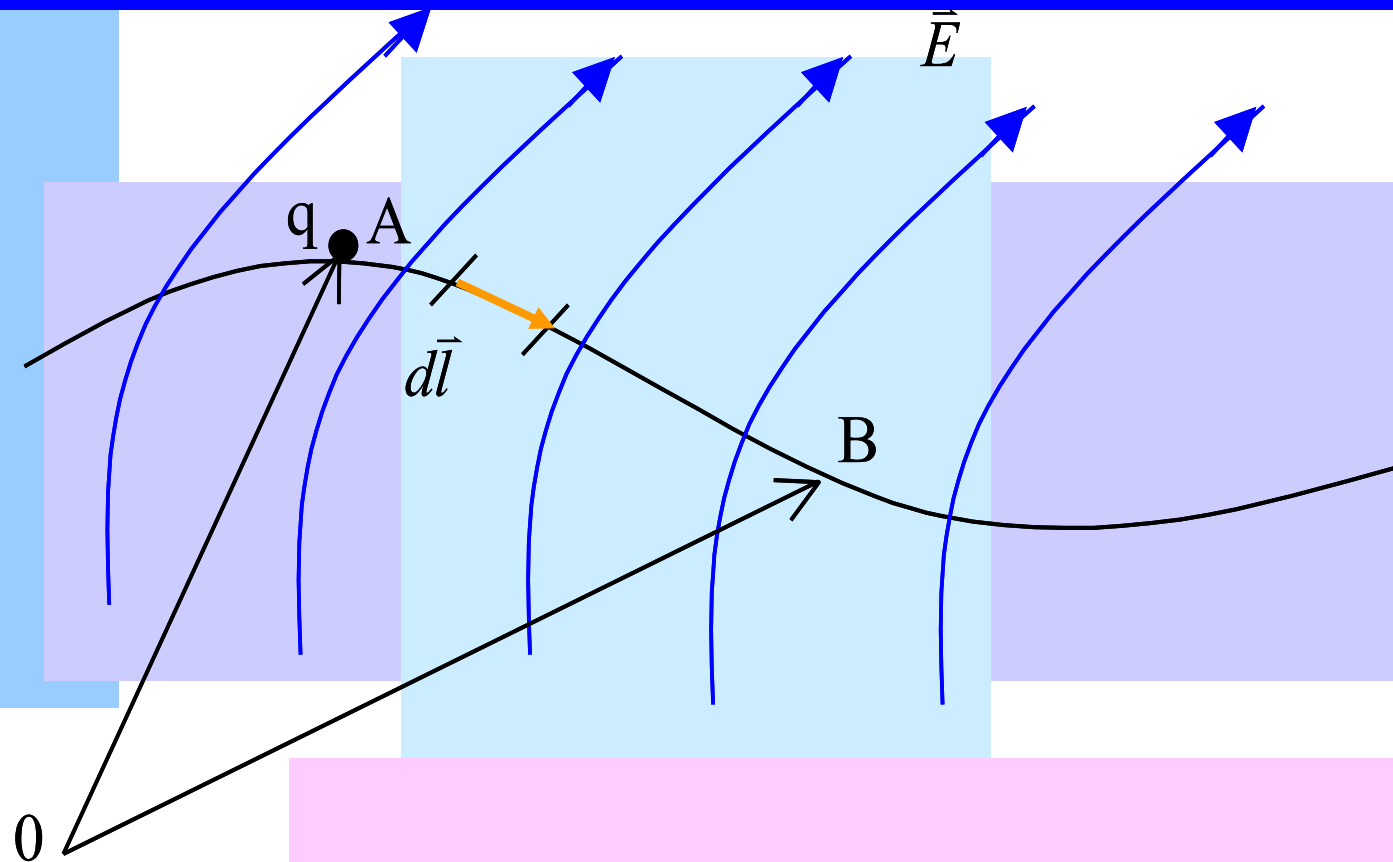
- Función Potencial
- Ecuación de Laplace,
- Campo Eléctrico Conservativo
- Resumen
- Dipolo eléctrico

Pablo Picasso, “La muerte de Casagemas”, 1901.

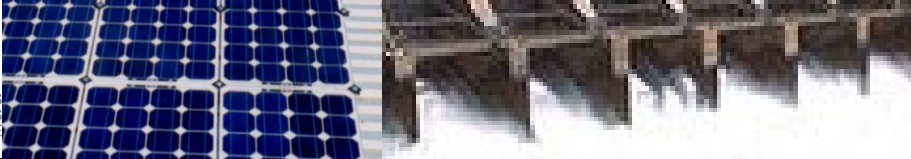




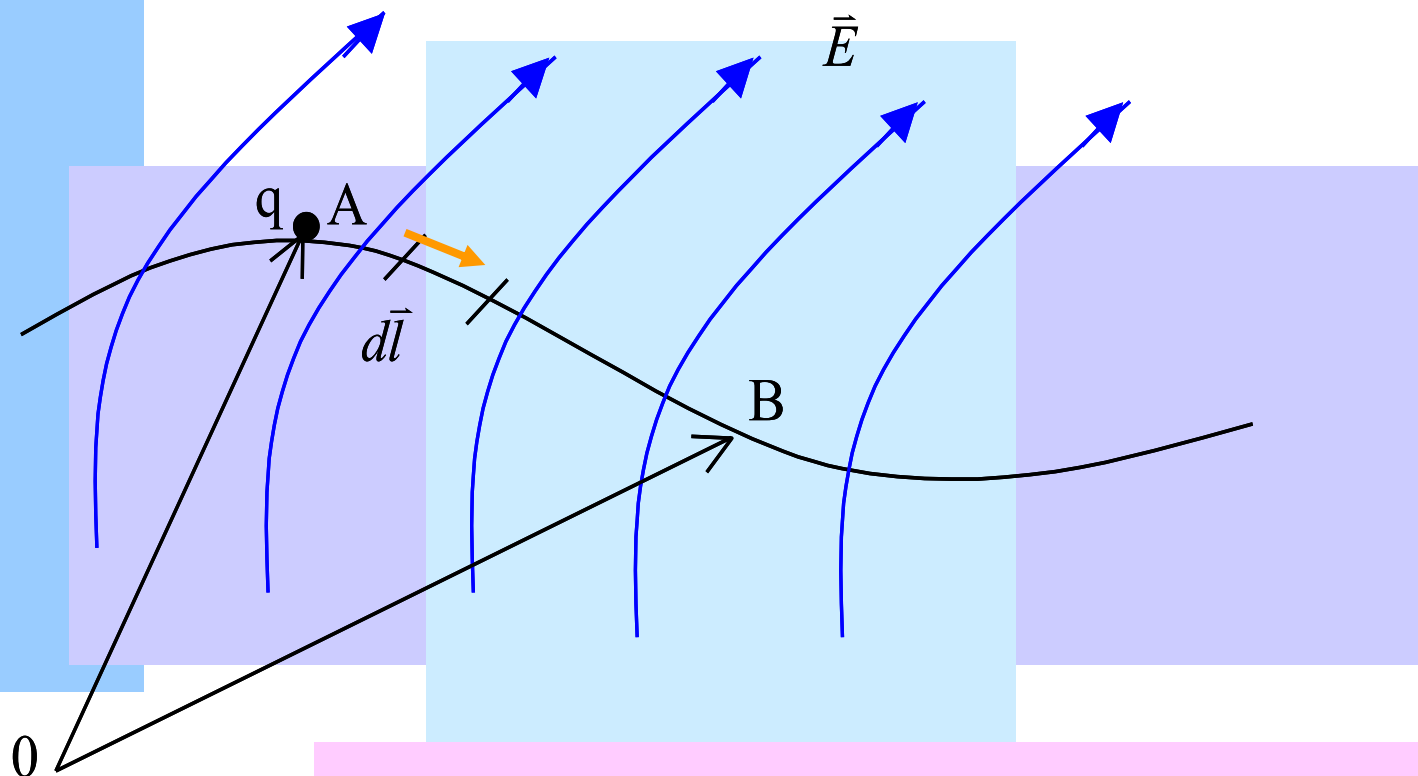
Trabajo de un Campo Eléctrico



$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad W = \int_A^B dW = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

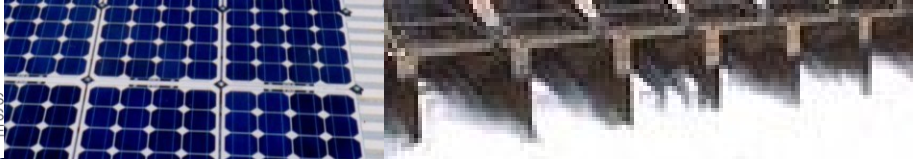


Definición de potencial



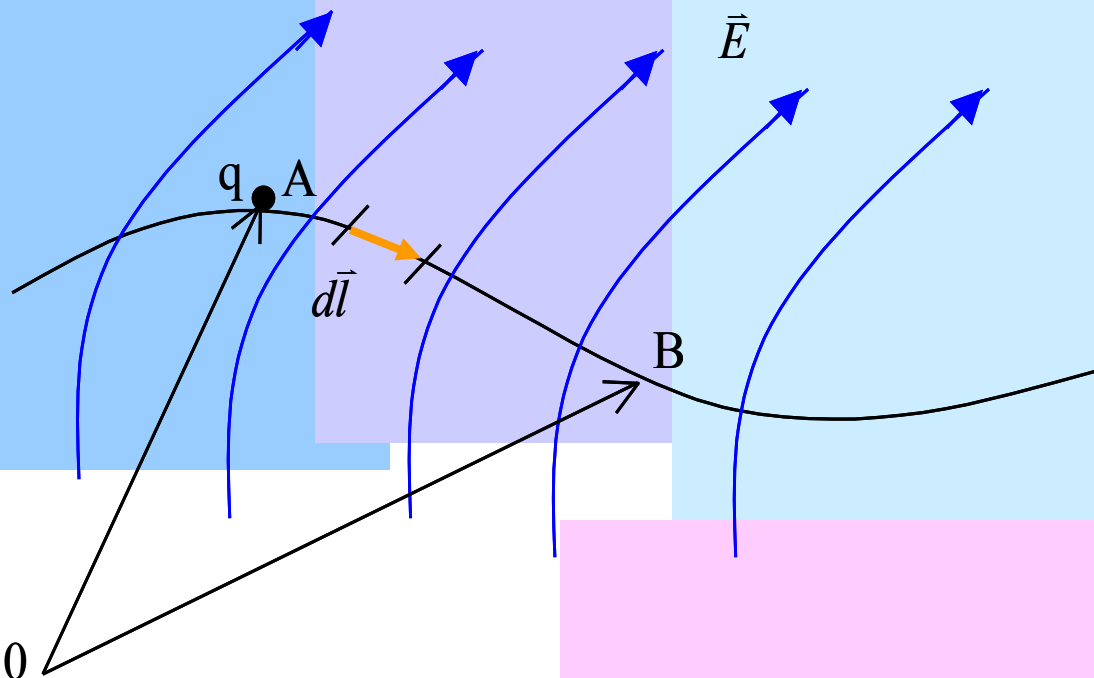
La energía potencial eléctrica por unidad de carga se define como diferencia de potencial eléctrico

$$dV = \frac{dW}{q} = -\vec{E} \bullet d\vec{l}$$



Definición de potencial

Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA} , como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga.

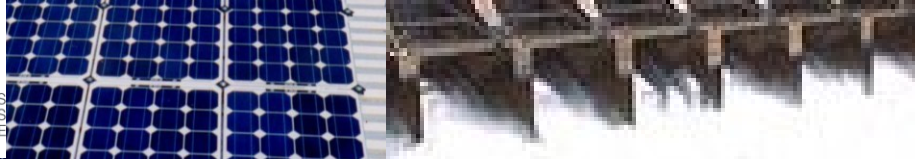


$$\int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Unidades de [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]



Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_n\|}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Relaciones entre campo eléctrico y potencial

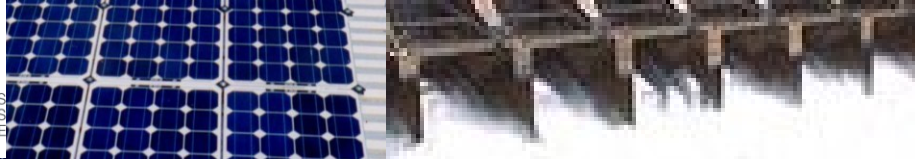
$$V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y
haciendo B variable

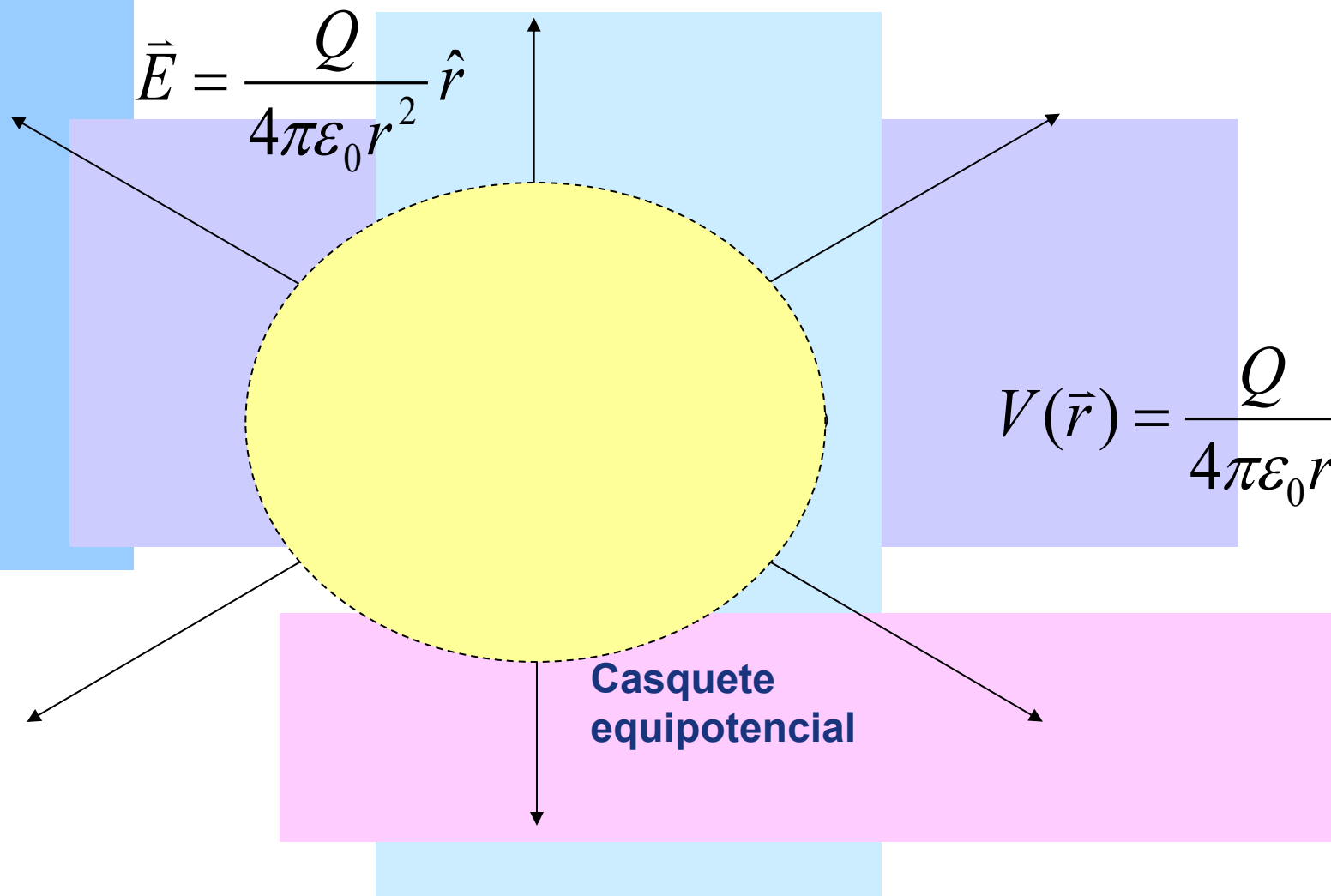
$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

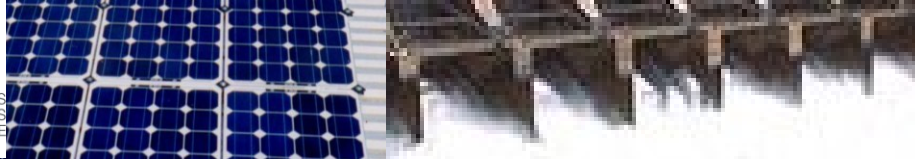
Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$



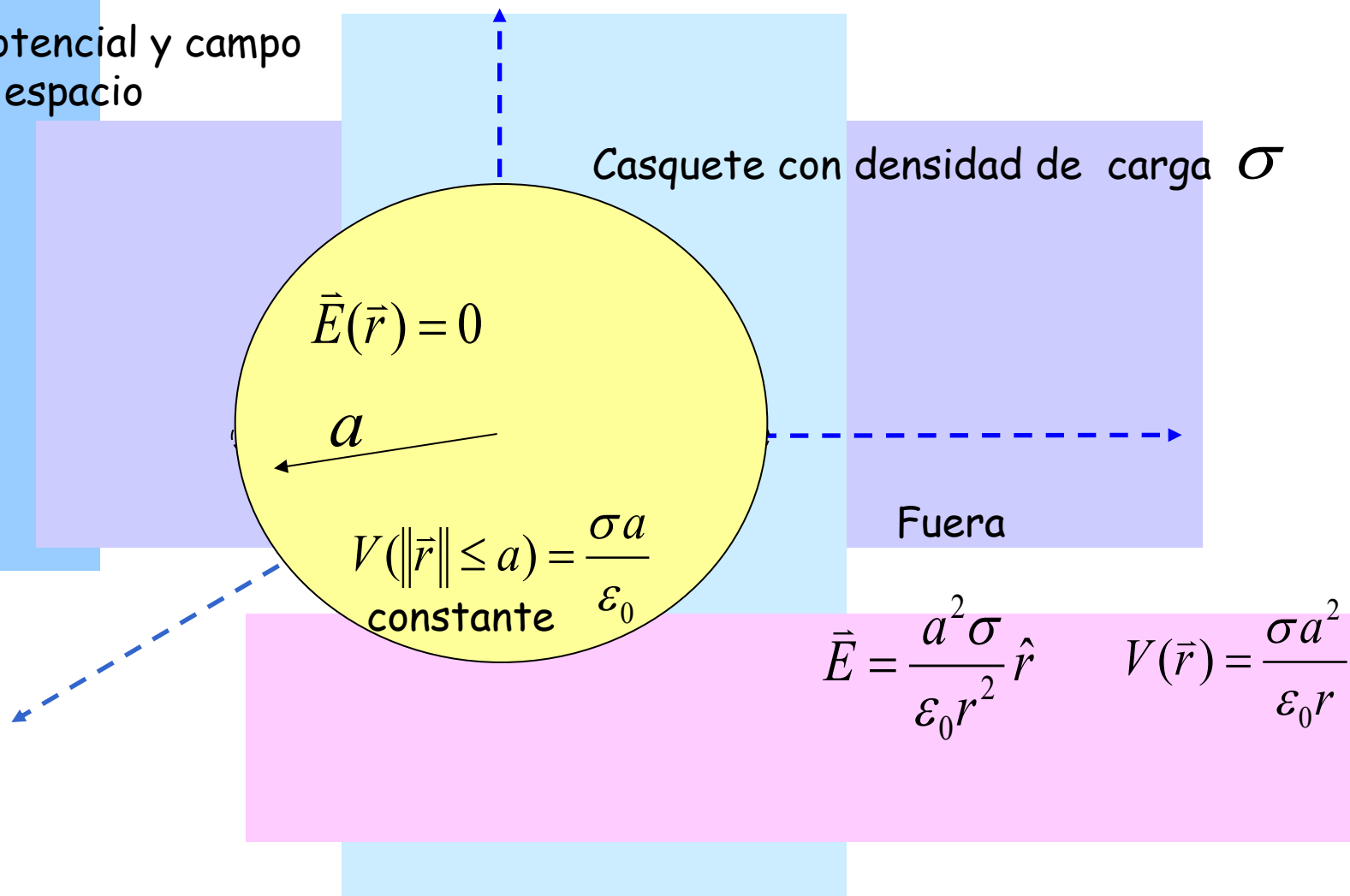
Campo eléctrico y potencial de carga

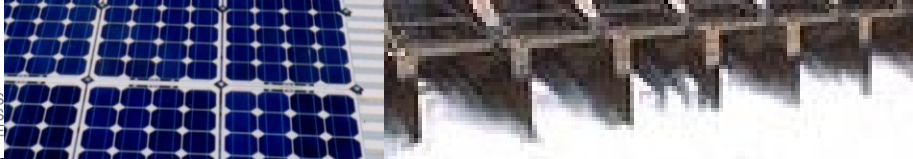




Ejemplo 11: Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo
en todo el espacio





ECUACION DE LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

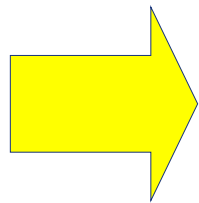
Tomando la divergencia

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



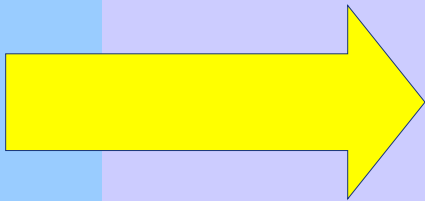
$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Ecuación de Poisson



ECUACION DE LAPLACE

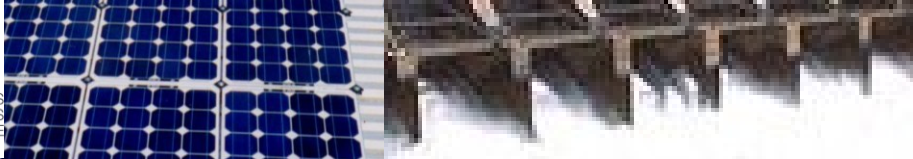
Si no hay cargas:



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Ecuación de Laplace.

- Es la más usada en la práctica para determinar el campo eléctrico
- Para resolverla se requieren condiciones de borde

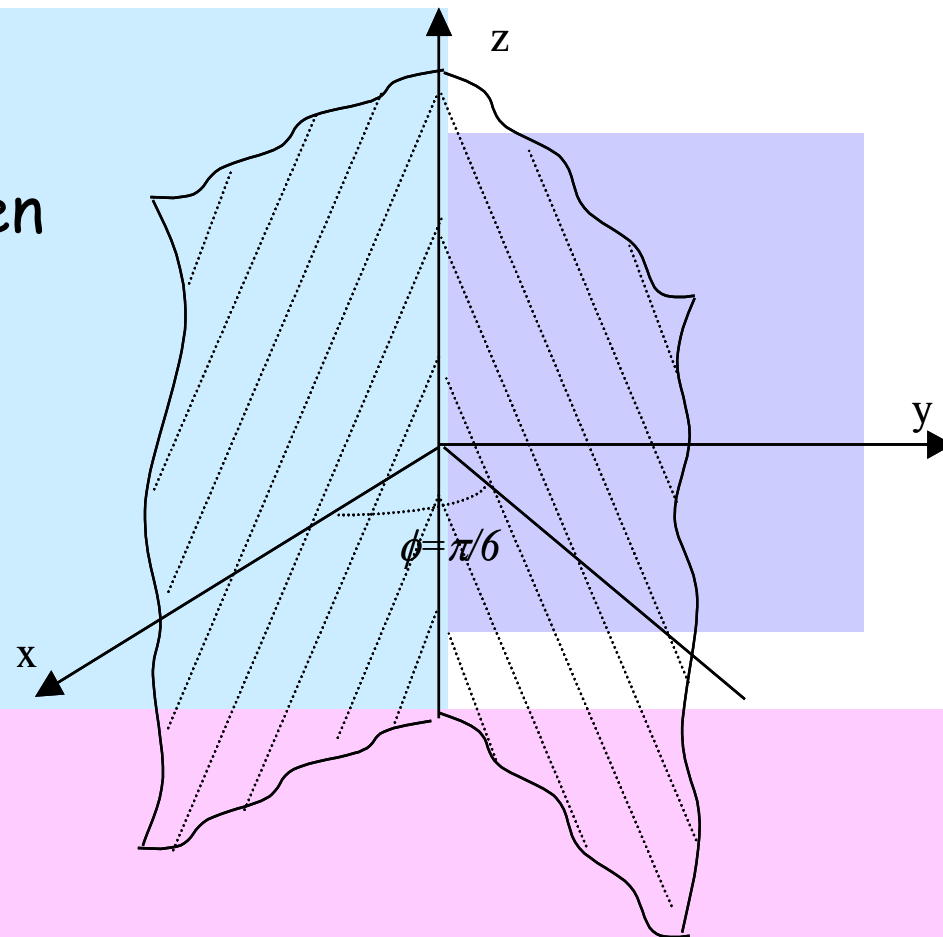


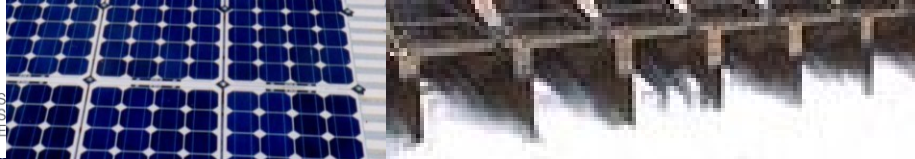
ECUACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12. Calcular V

Se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por:

- $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y
- $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V.

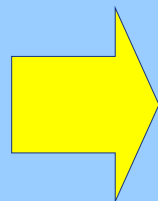




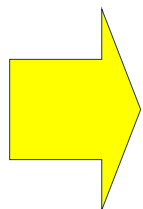
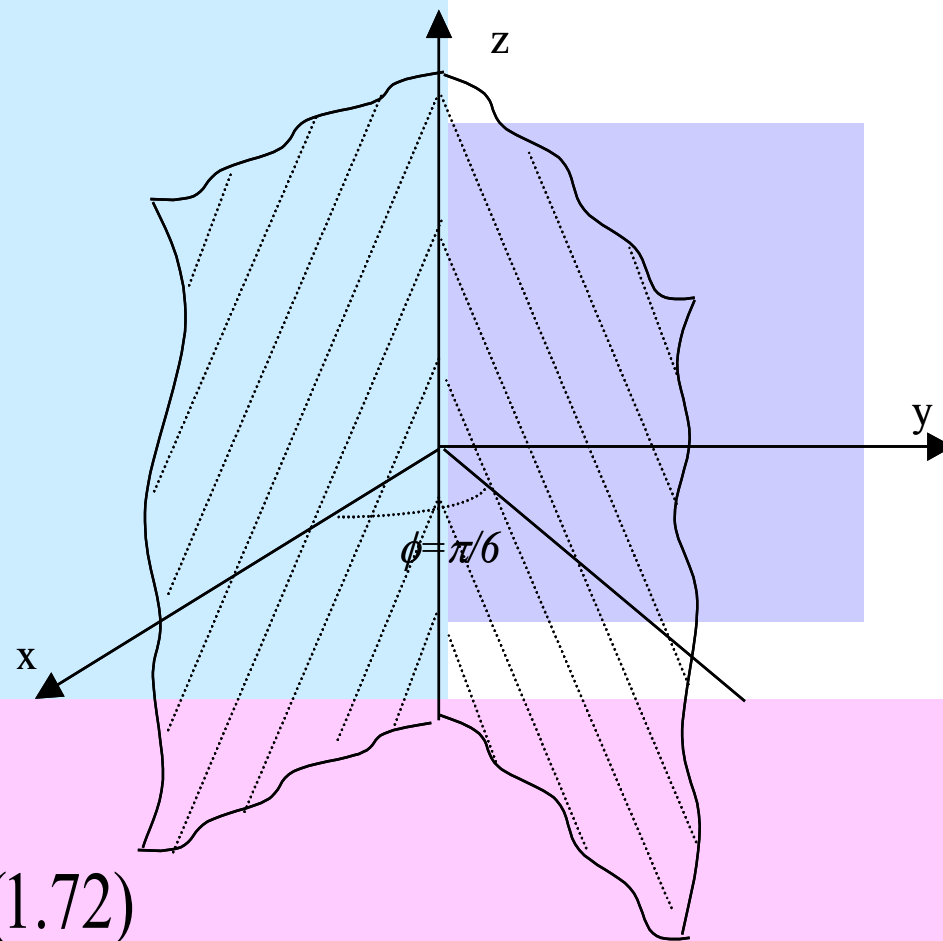
Ejemplo

Solⁿ

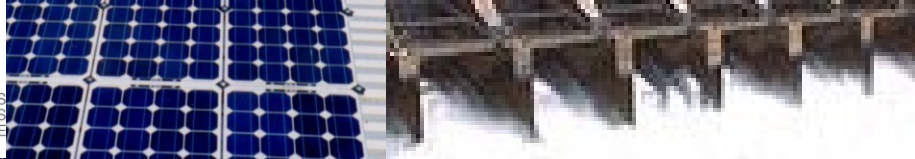
Hay que darse cuenta que V sólo depende de ϕ



Sólo interesa una coordenada del Laplaciano (ϕ)



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$



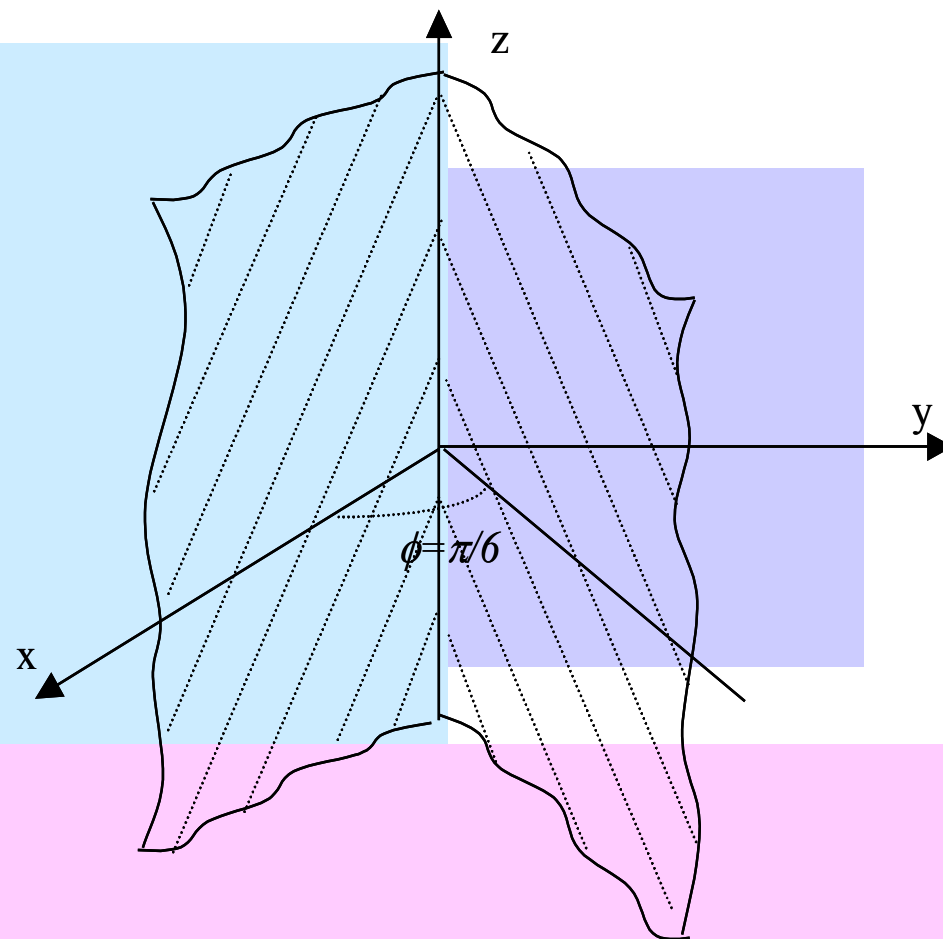
Ejemplo

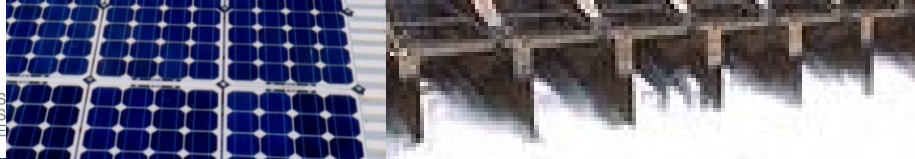
Luego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Cuya solución es

$$V = A\phi + B$$





Ejemplo

Condiciones de borde:

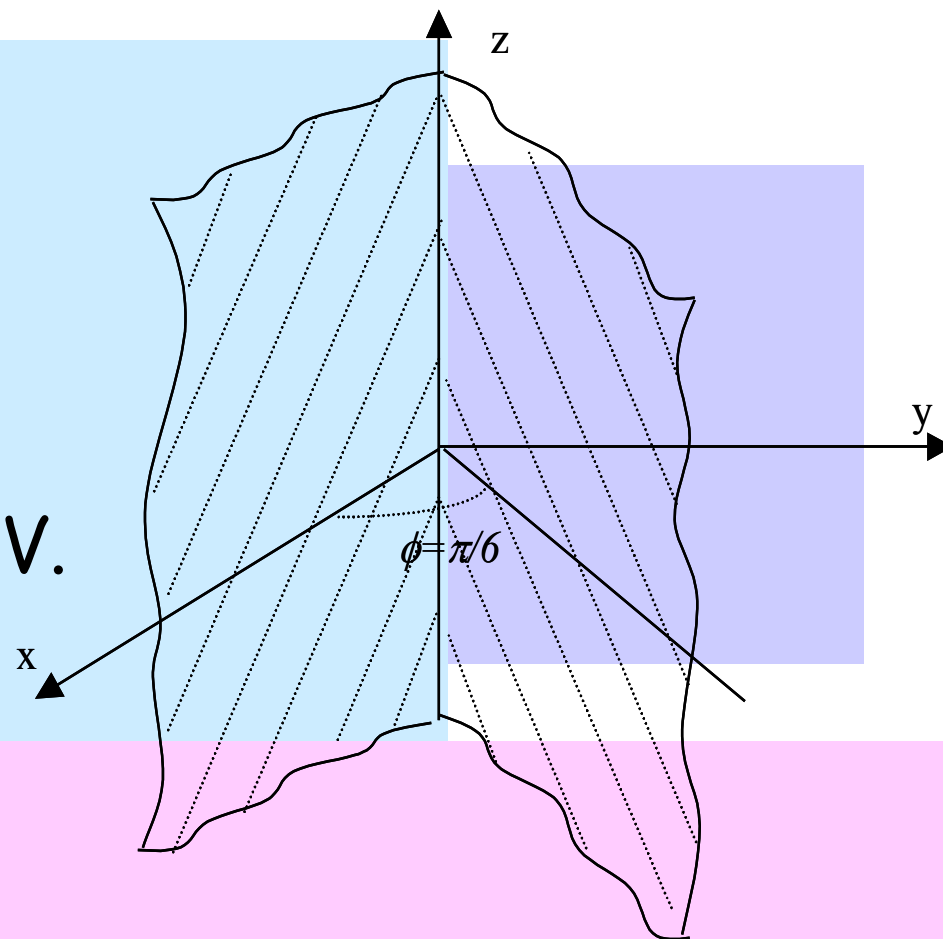
$$V(\phi=0, \rho, z) = 0$$

$$B=0$$

$$\gamma \quad V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100 \text{ V.}$$

$$100 = A \pi / 6$$

$$\Rightarrow A = \frac{600}{\pi}$$





Ejemplo

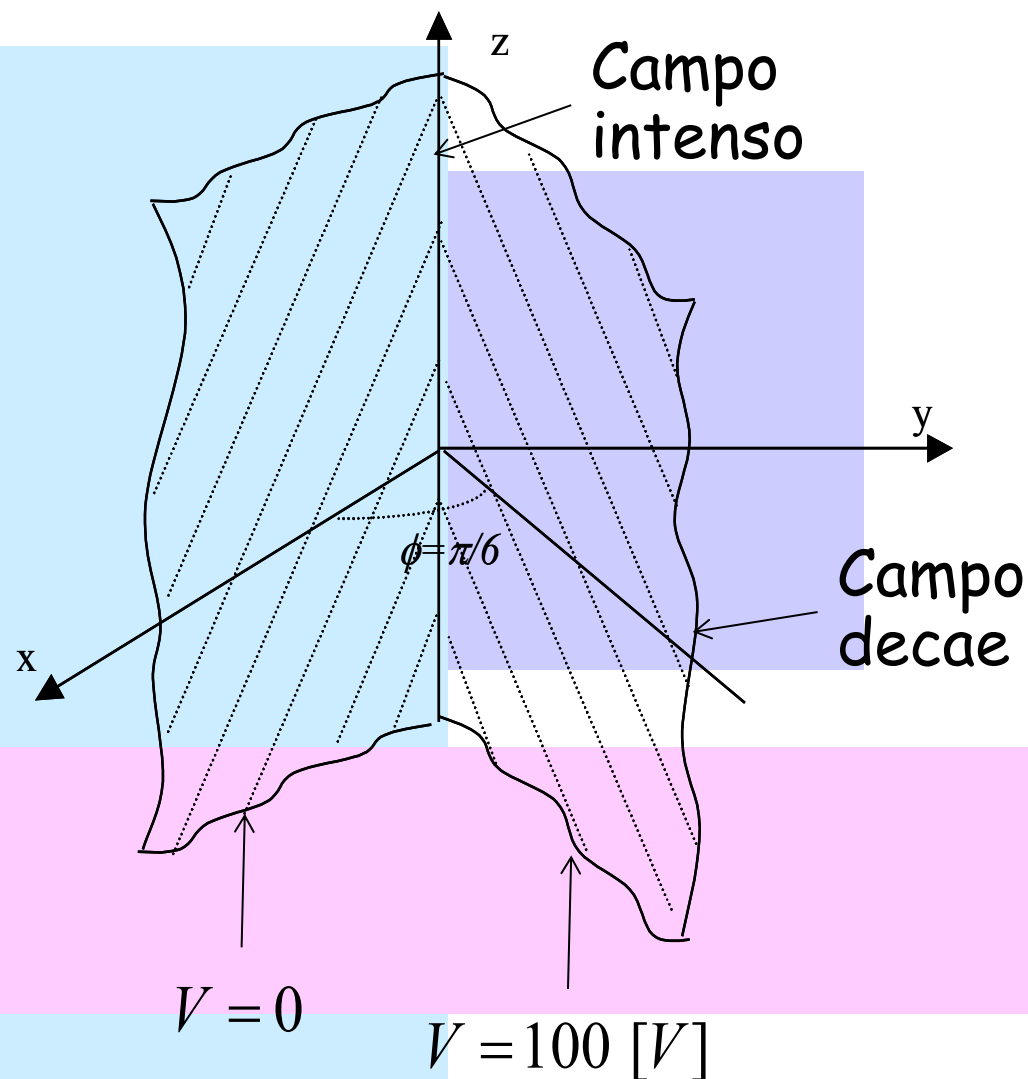
Luego el potencial es

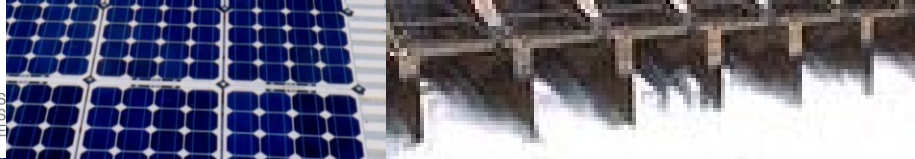
$$V = \frac{600}{\pi} \phi$$

y el campo

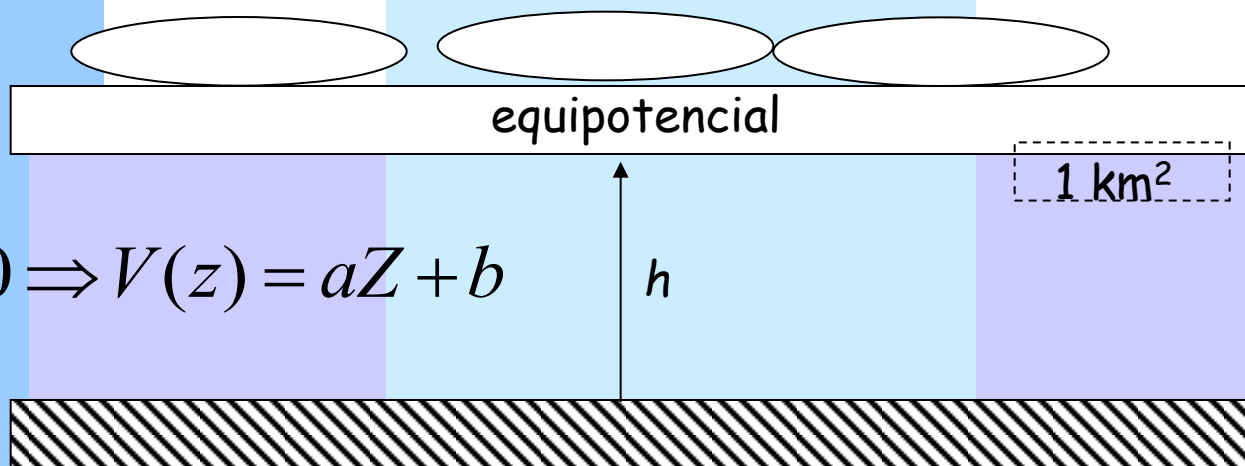
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi \rho} \hat{\phi}$$





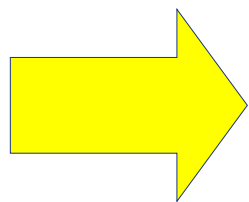
Ejemplo



$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V(z) = aZ + b$$

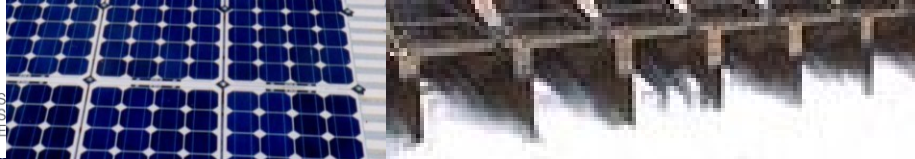
Condiciones de Borde

$$\left. \begin{array}{l} V(z=0) = 0 \\ V(z=1) = 5 \end{array} \right\} y \quad \therefore V(z) = 5z$$



$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -5\hat{k}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -10\epsilon_0 \hat{k}$$



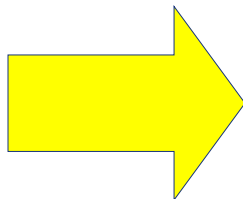
Campo Eléctrico Conservativo

Teorema: Si $f(\vec{r})$ es un campo escalar, entonces

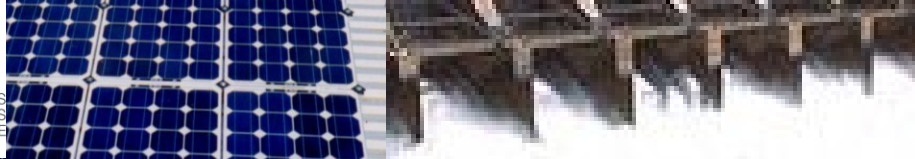
$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$



Campo Eléctrico Conservativo

Integrando en S

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Aplicando el teorema
de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donde $C(S)$ es el contorno que limita a la superficie S

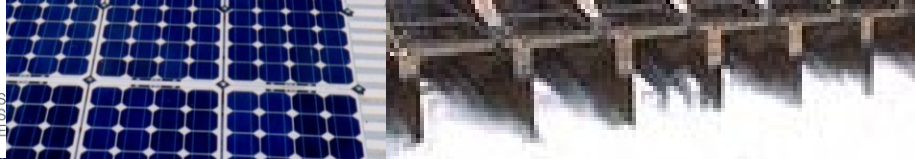


Campo Eléctrico Conservativo

Luego el trabajo en una trayectoria cerrada vale

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{\text{neto}} = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.

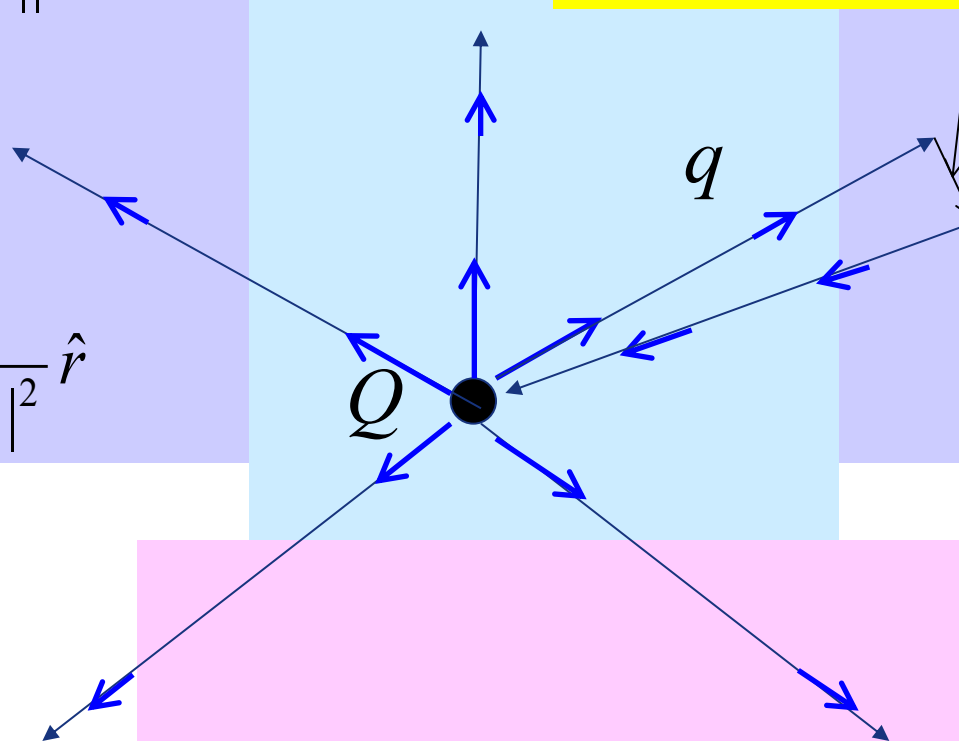


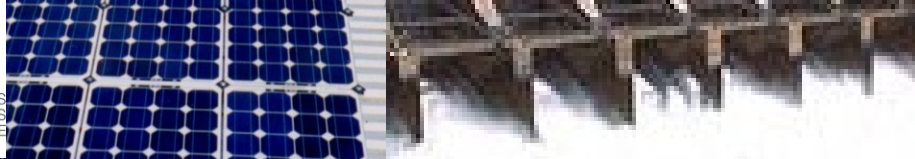
Campo Eléctrico Conservativo

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

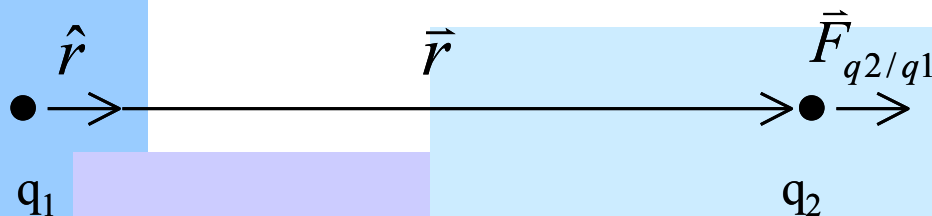
Trabajo neto nulo en
trayectoria cerrada

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$





Resumen

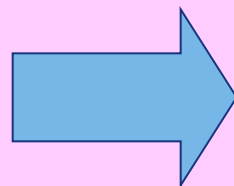


Fuerza que siente q_2 debido a q_1

$$\vec{F}_{q_2/q_1} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^2} = q_2 \cdot \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

Campo Eléctrico de q_1

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}$$



$$\vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \vec{E}$$



Resumen

Formas para obtener campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') dV$$

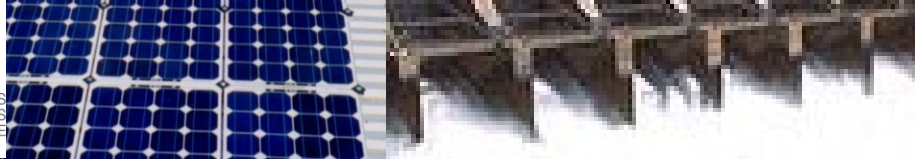
Integración directa

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

A través del potencial



Resumen

Formas para obtener el potencial eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Integración directa

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Resolviendo ecuación de Laplace (necesita Condiciones de Borde)

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

A través del campo eléctrico



Resumen

Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Luego

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{\text{neto}} = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.



Ahora veremos el estudio del campo eléctrico en medios materiales

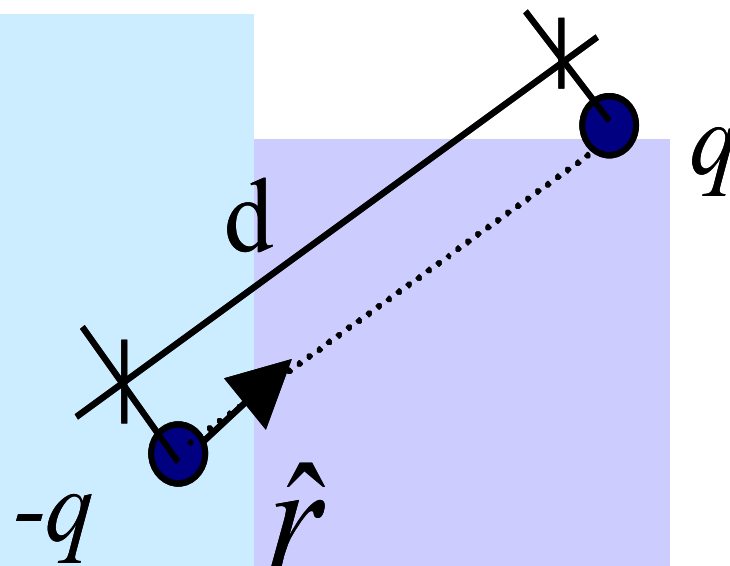
- Para entender este fenómeno se requiere dominar el concepto de dipolo eléctrico,
- Dipolo de un conjunto de cargas,
- Dipolo de una distribución volumétrica de cargas



Dipolo Eléctrico

Se define el dipolo eléctrico como

$$\vec{p} = qd\hat{r} \quad [\text{C}\cdot\text{m}]$$



Sistema de dos cargas de igual magnitud y signo contrario que se mantienen (mediante algún elemento o fuerza externa) a una distancia constante entre ellas



Potencial de Dipolo Eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1\|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_2\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2\|} \right)$$

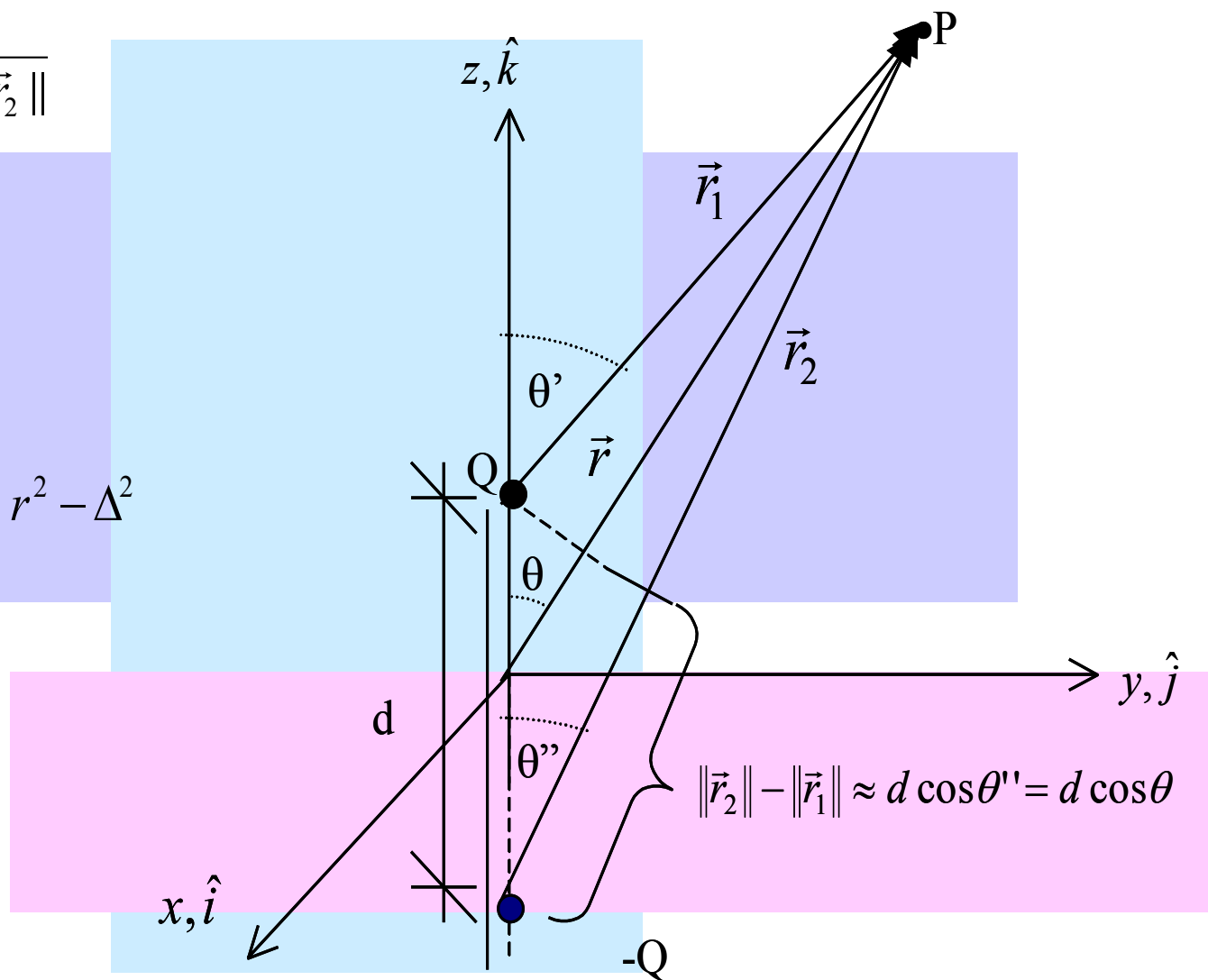
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|}$$

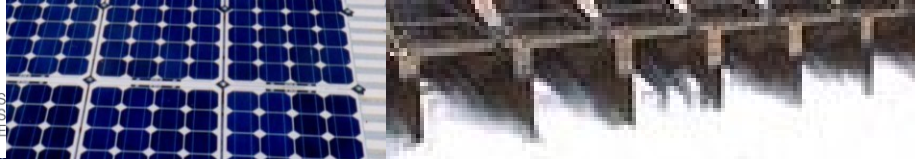
$$\|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx (r - \Delta)(r + \Delta) = r^2 - \Delta^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx r^2$$

$$\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\| \approx d \cos \theta$$

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$





Potencial de Dipolo Eléctrico

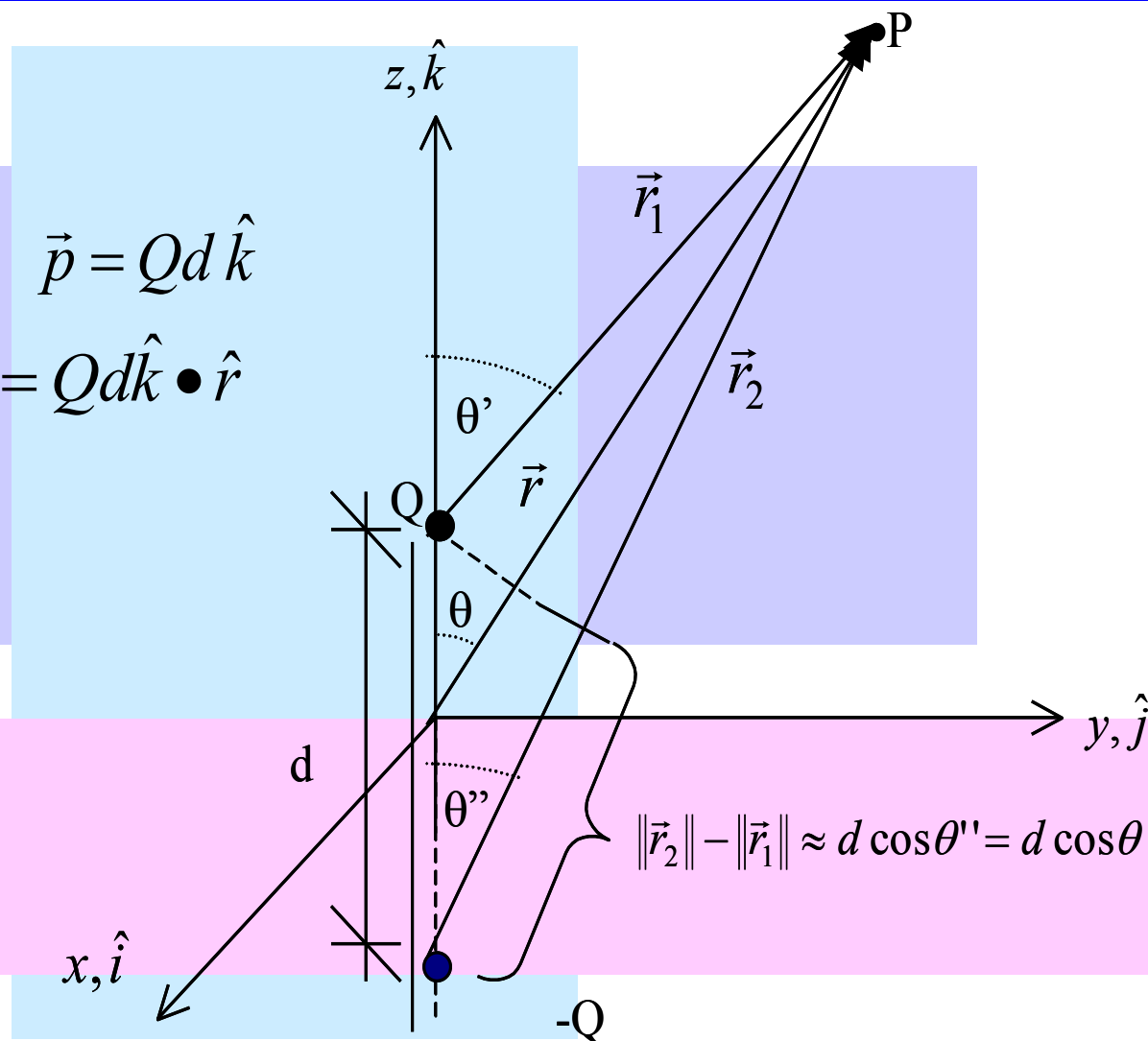
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

Definiendo el dipolo $\vec{p} = Qd \hat{k}$

y dado que $Qd \cos \theta = Qd \hat{k} \cdot \hat{r}$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2}$$

Potencial eléctrico
de un dipolo





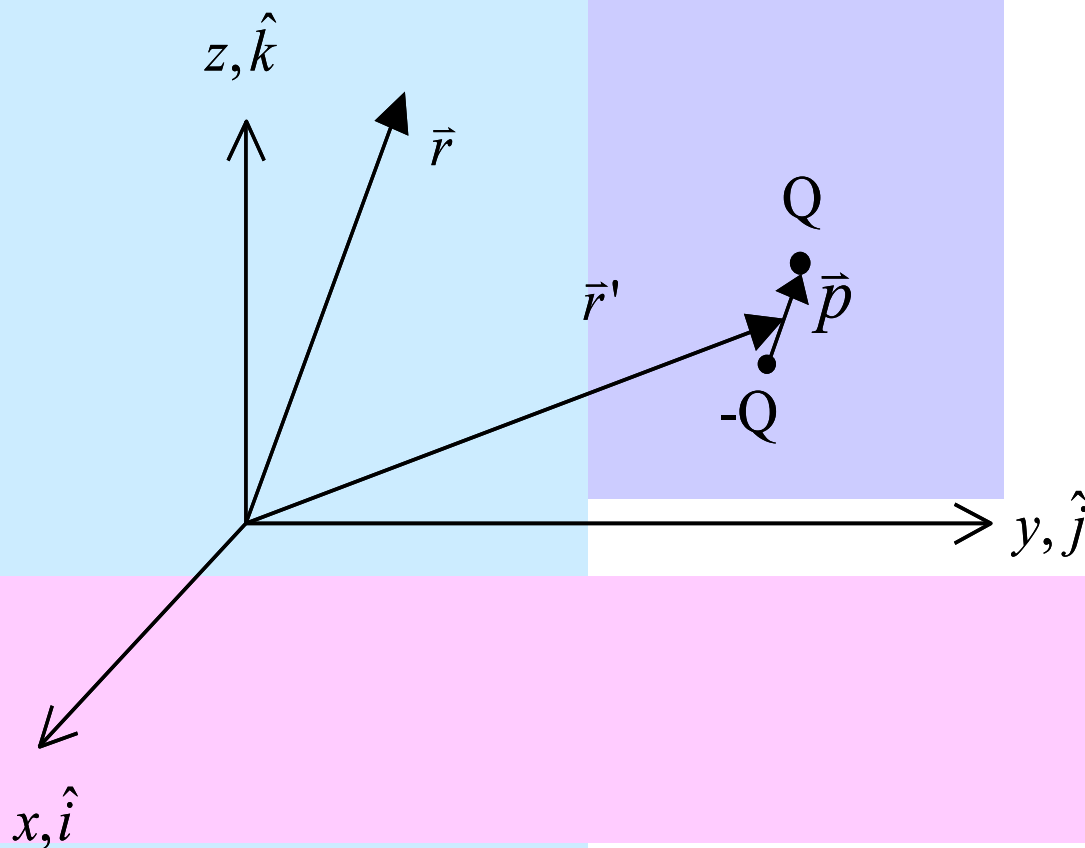
Potencial de Dipolo Eléctrico

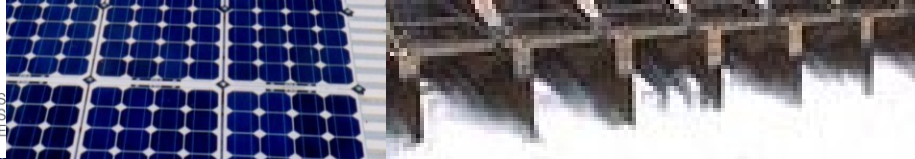
La expresión en un sistema de referencia independiente de la posición del dipolo es

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Campo eléctrico

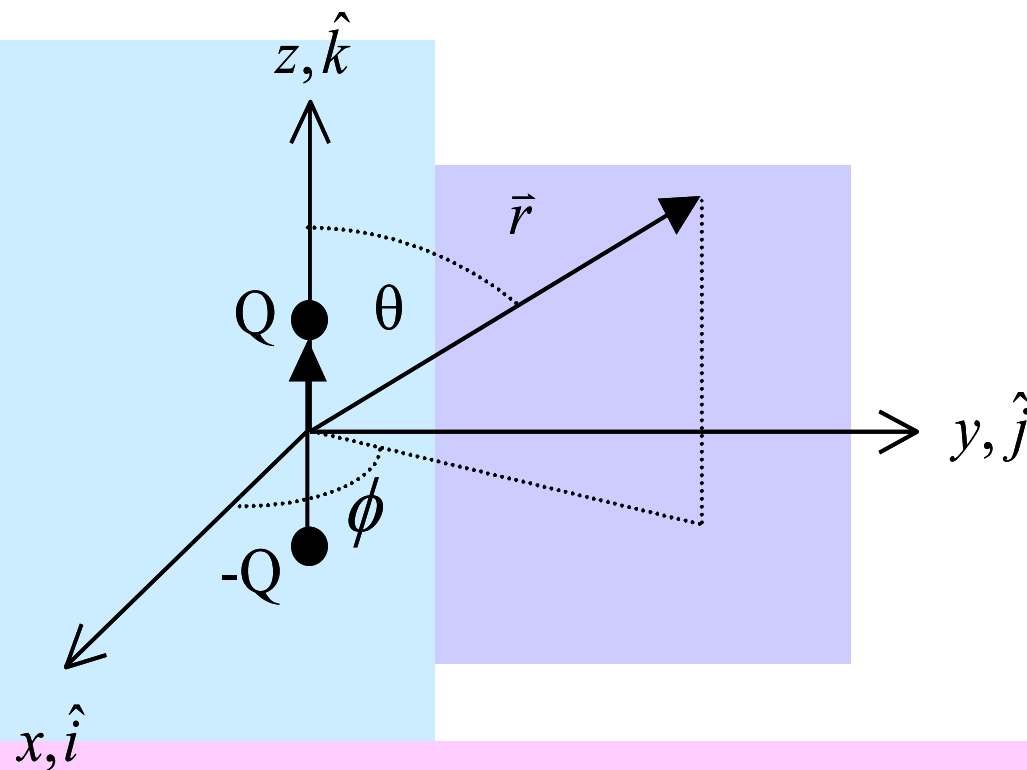
$$\vec{E} = -\nabla V$$

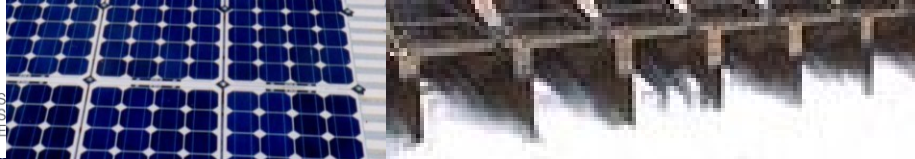




Ejemplo

Calcular el potencial y el campo eléctrico de un dipolo $\vec{p} = p\hat{k}$ ubicado en el centro de un sistema de coordenadas





Ejemplo

Solⁿ

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

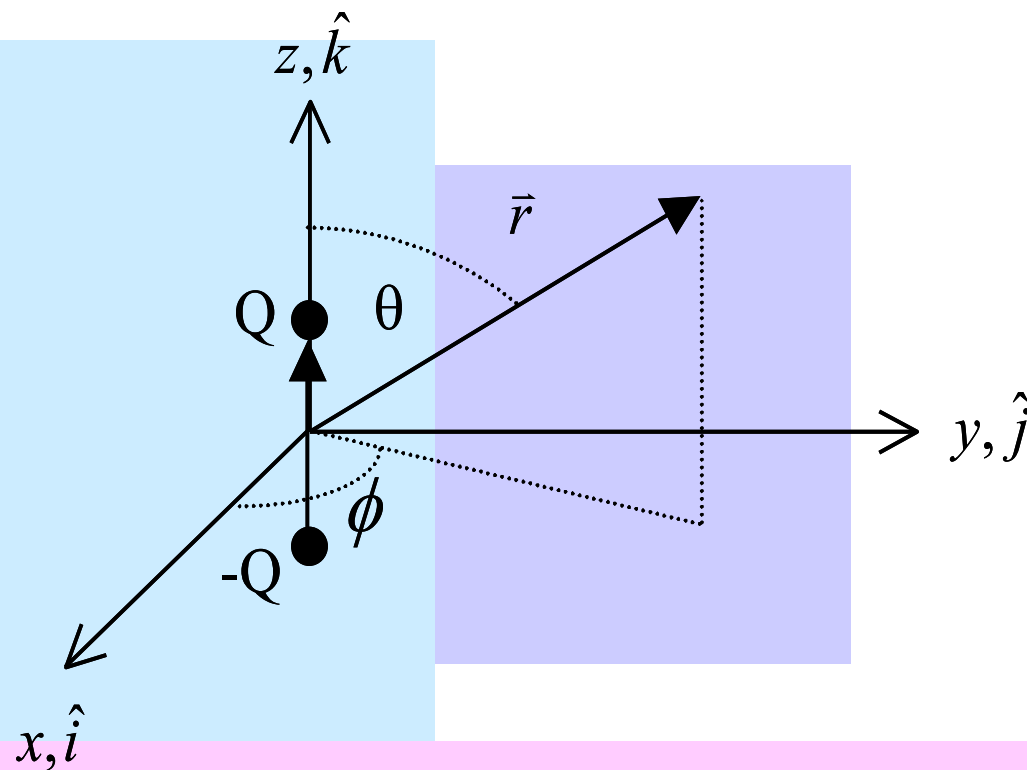
$$\vec{r} = r\hat{r}$$

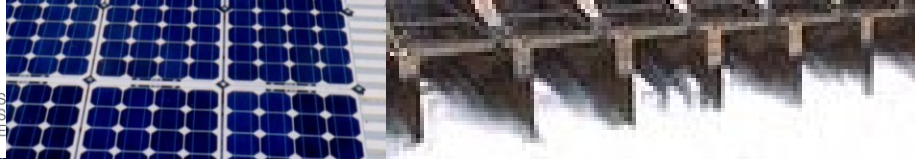
$$\vec{r}' = 0$$

$$\vec{p} = p\hat{k}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





Ejemplo

$$\vec{E} = -\nabla V$$

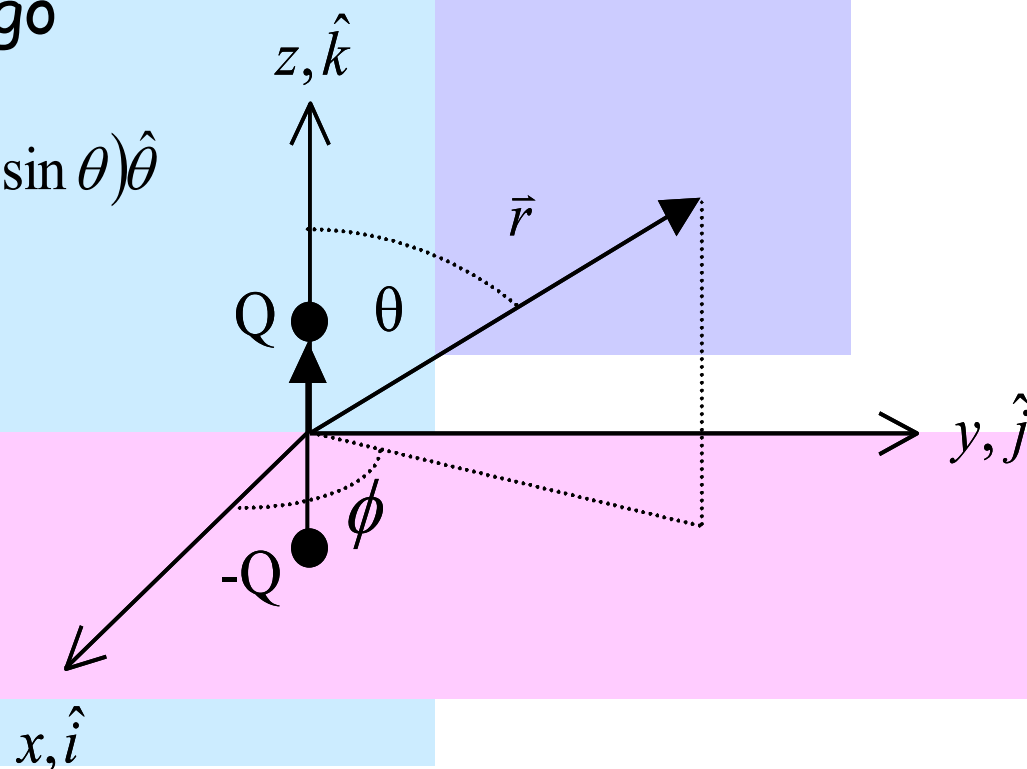
$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

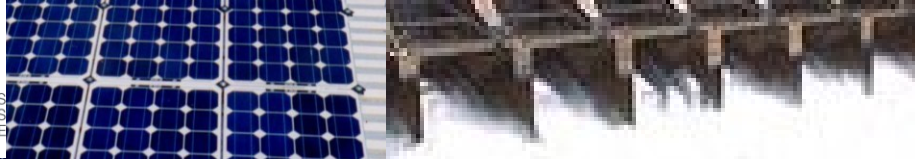
$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$

V solo depende de r y θ , luego

$$\nabla V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} (-2r^{-3}) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-\sin \theta) \hat{\theta}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$

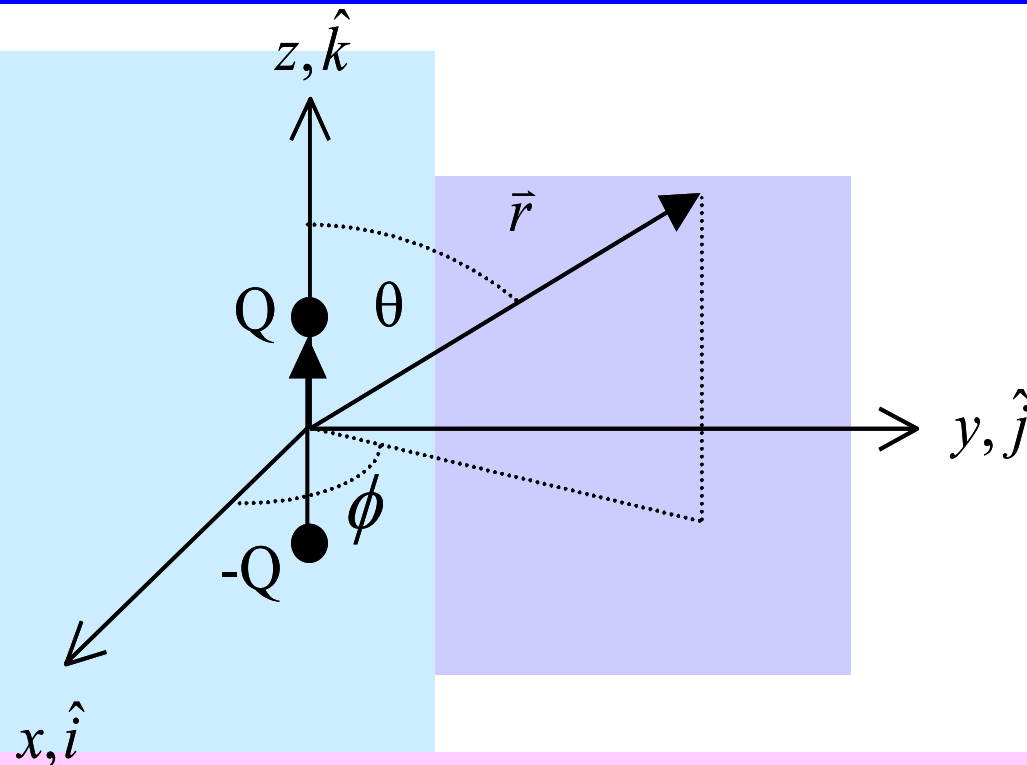




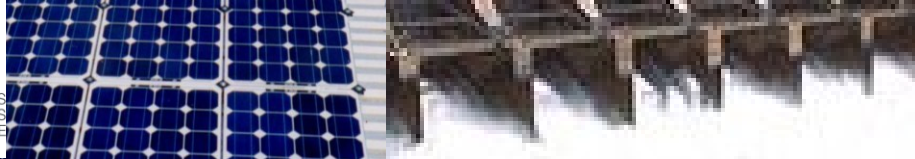
Dipolo Eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \right)$$



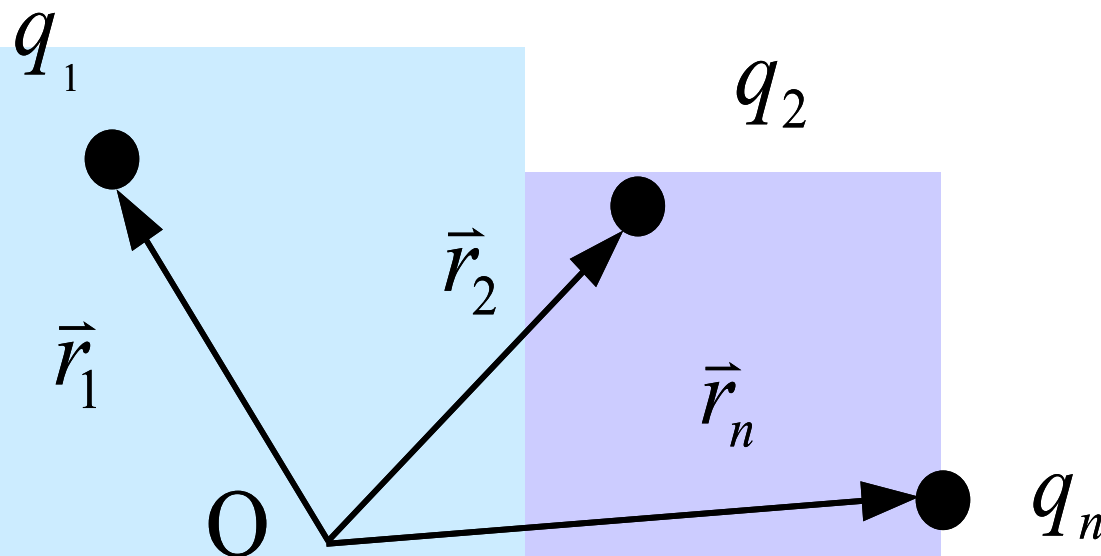
Para puntos muy alejados $\vec{E}(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^3}, \quad V(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^2}$



Dipolo de un Conjunto de Cargas

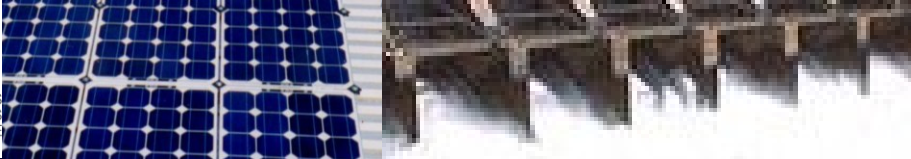
Condición

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0$$



Momento Dipolar Eléctrico del conjunto

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$



Dipolo de un Conjunto de Cargas

Momento Dipolar Eléctrico

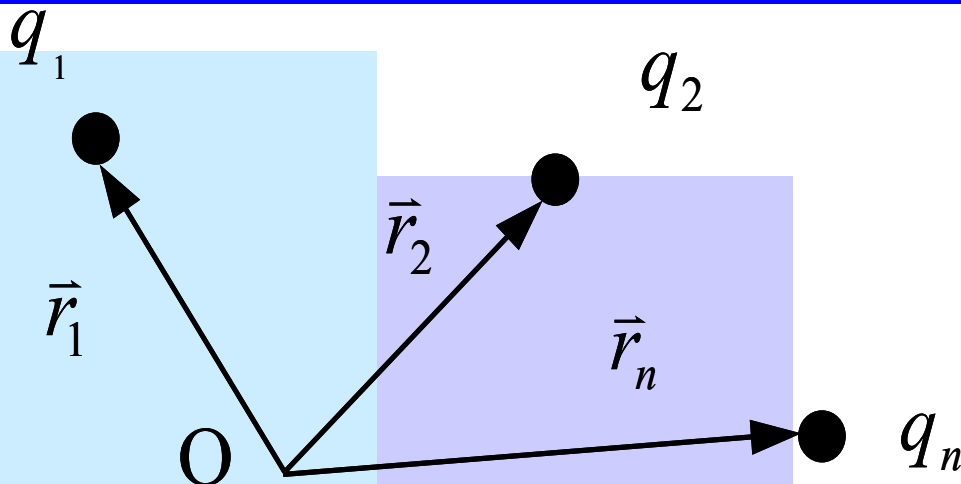
$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k \Rightarrow \vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + \sum_{k=2}^n q_k \vec{r}_k$$

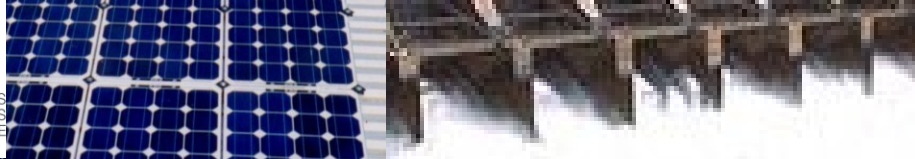
Aplicando la condición

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0 \Rightarrow q_1 = -\sum_{k=2}^n q_k$$

$$\vec{p} = \left(-\sum_{k=2}^n q_k \right) \vec{r}_1 + \sum_{k=2}^n q_k \vec{r}_k \Rightarrow \vec{p} = \sum_{k=2}^n q_k (\vec{r}_k - \vec{r}_1)$$

es independiente
del origen



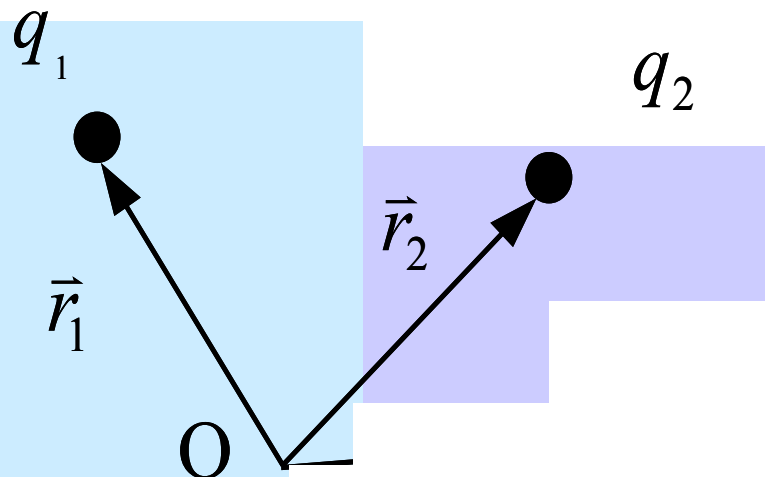


Dipolo de un Conjunto de Cargas

Momento Dipolar Eléctrico

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$

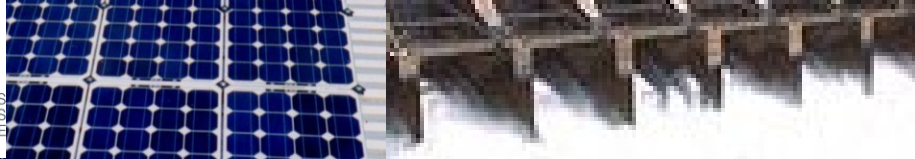
Para $n=2$ se tiene



$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 \Rightarrow q_1 = -q_2 = Q$$

$$\Rightarrow \vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}$$

**Definición de
dipolo**

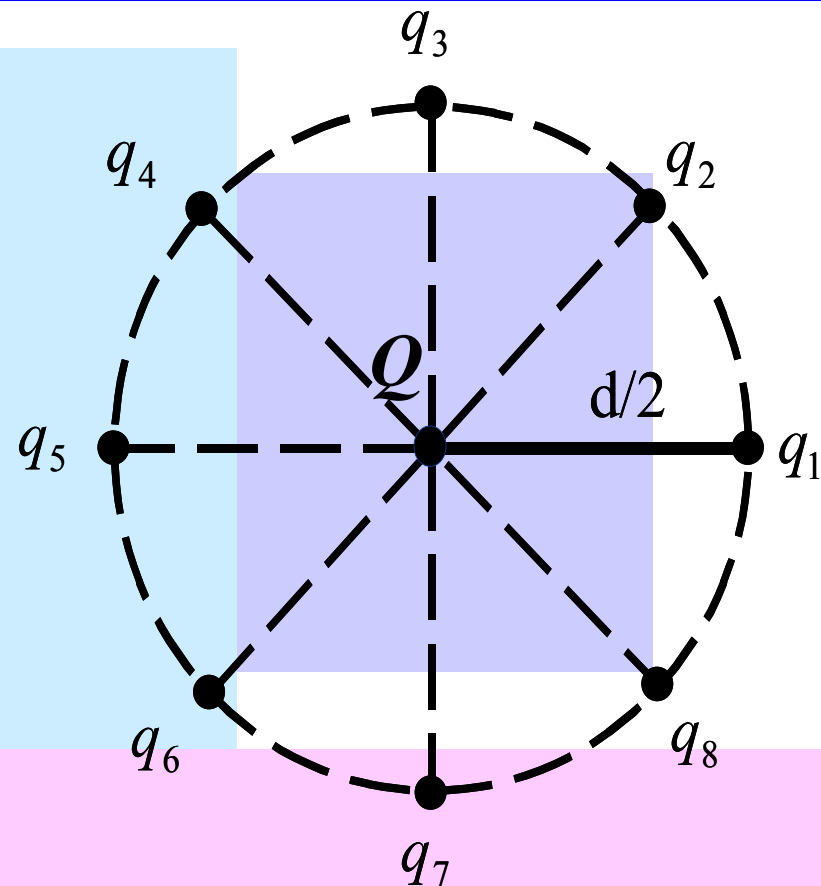


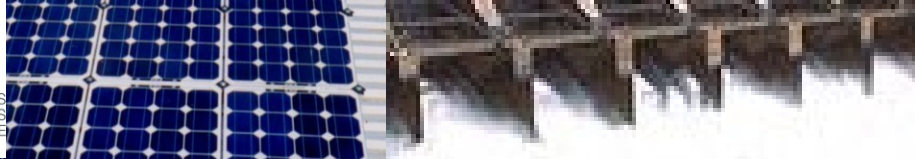
Ejemplo

Para configuración de cargas calcular momento de dipolar si cargas en la periferia son idénticas y cumplen:

$$Q = -\sum_{i=1}^8 q_i$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_8 = q$$





Ejemplo

Solⁿ

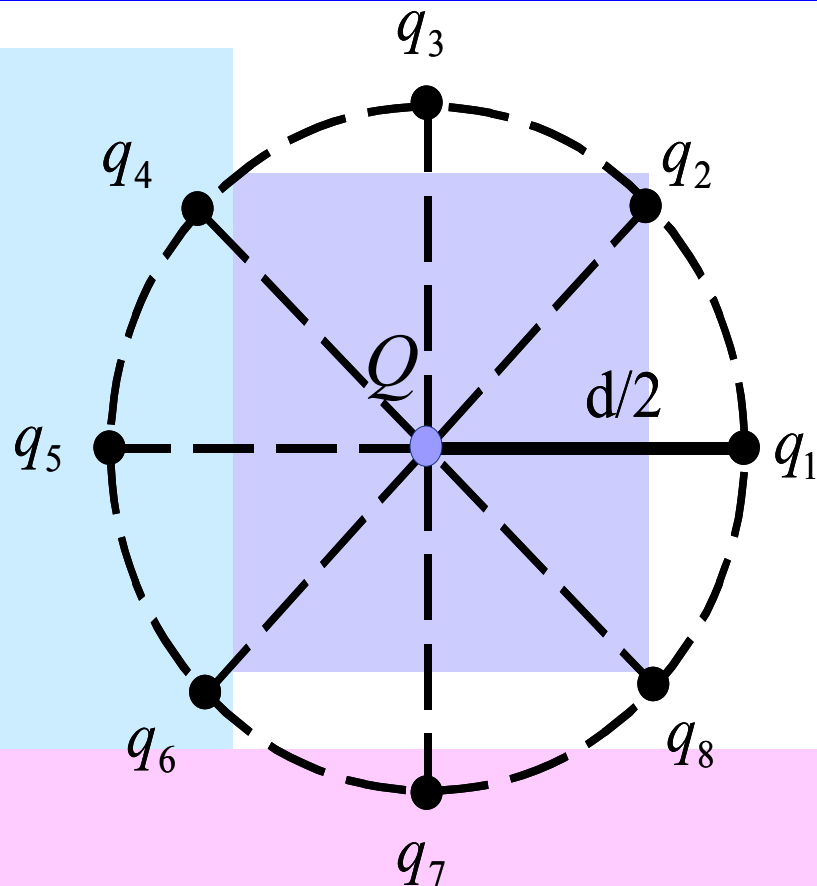
$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$

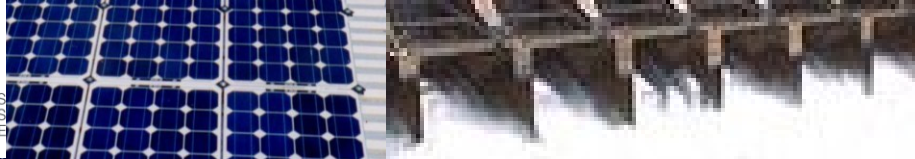
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^8 q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0$$

$$\vec{p} = q \times \sum_{i=1}^8 \vec{r}_i$$

$$\vec{p} = q \times 0$$

$$\therefore \vec{p} = 0$$





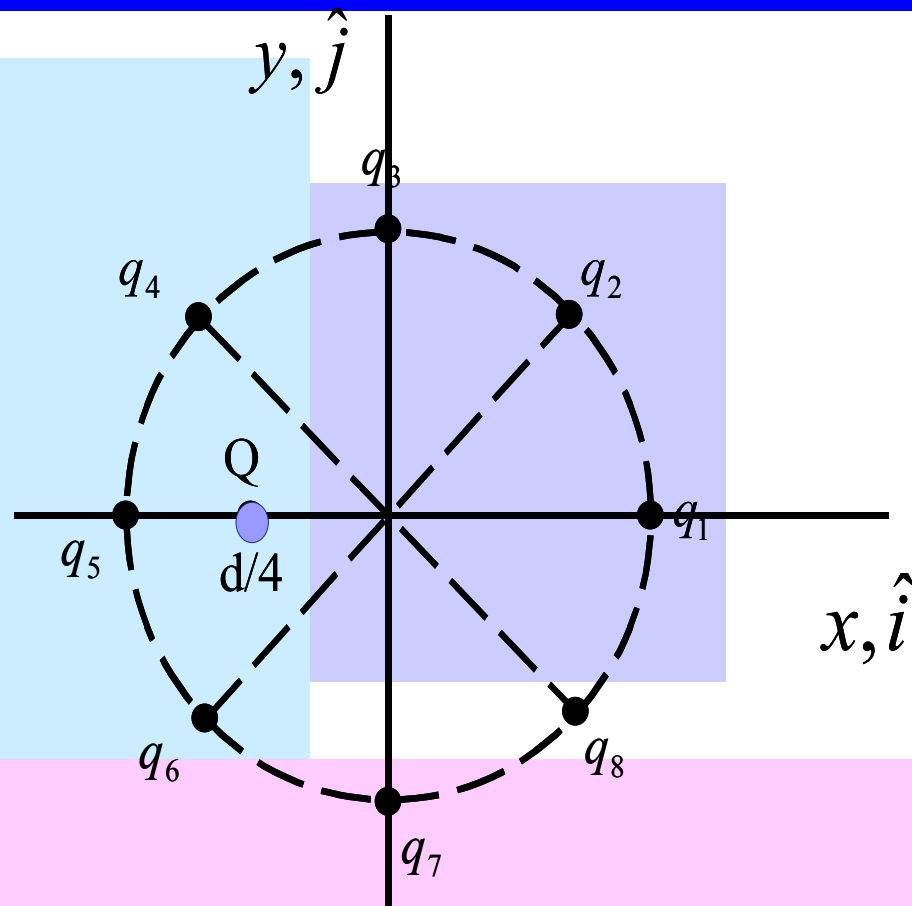
Ejemplo

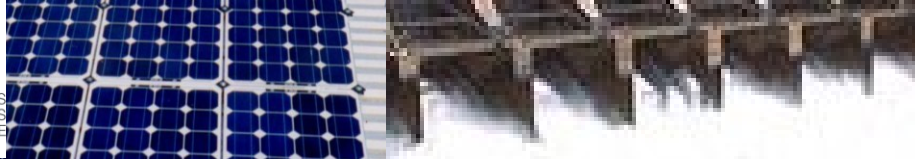
Calcular momento dipolar si:

$$Q = -\sum_{i=1}^8 q_i$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_8 = q$$

y carga Q ubicada a $d/4$ del origen (descentrada).





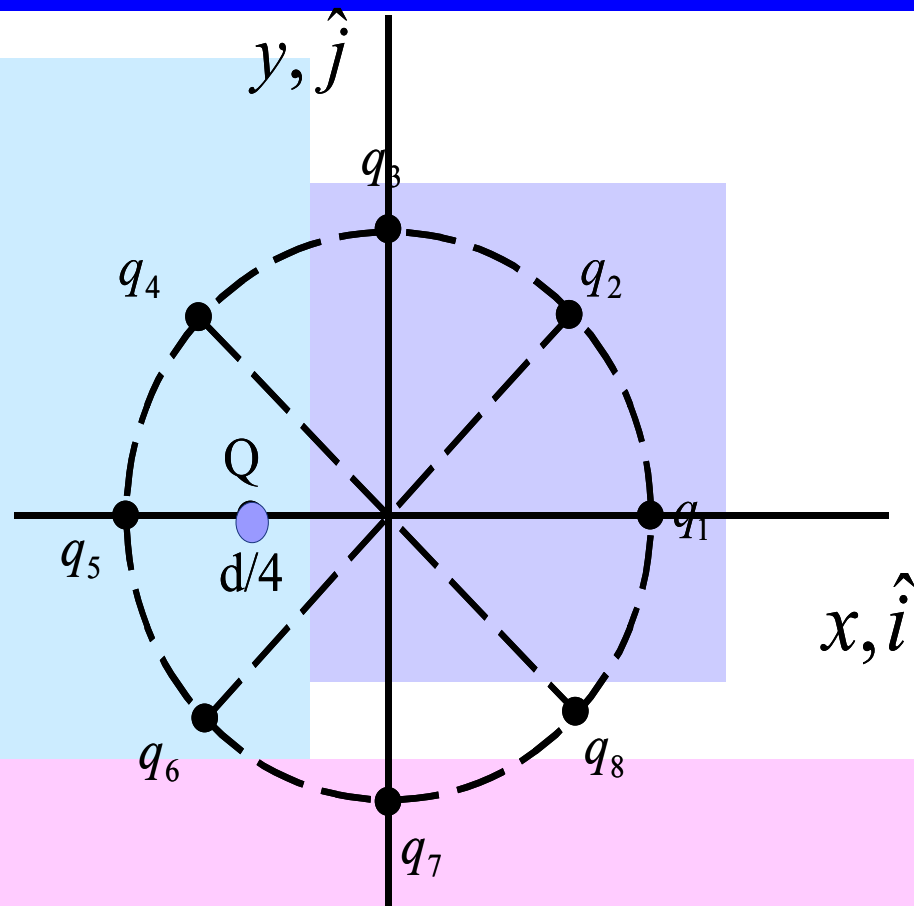
Ejemplo

Solⁿ

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i + Q \left(-\frac{d}{4} \right) \hat{i}$$

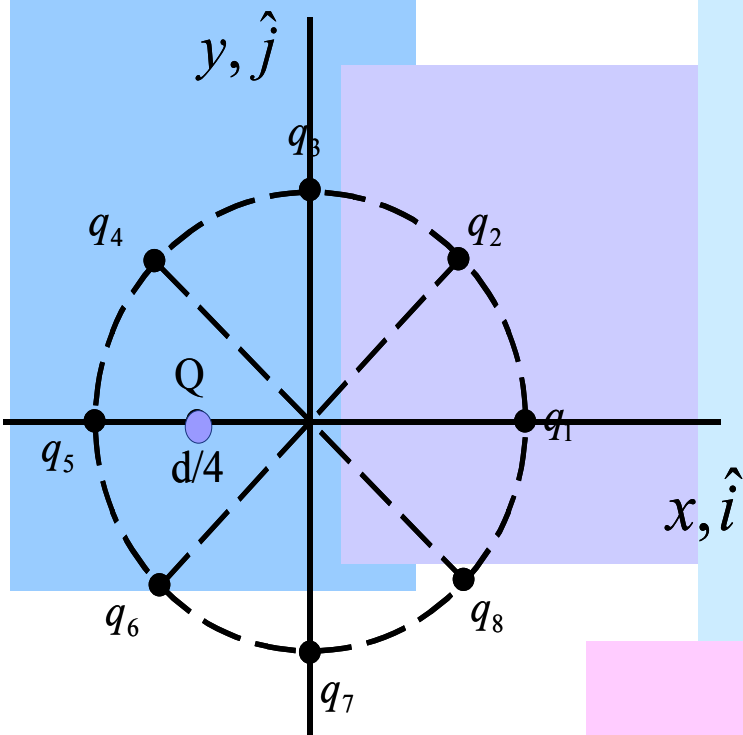
$$\vec{p} = -Q \frac{d}{4} \hat{i}$$



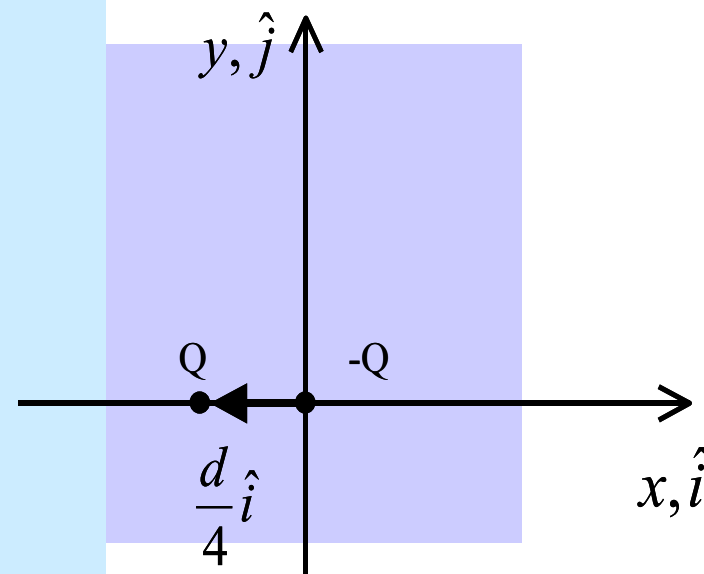


Ejemplo

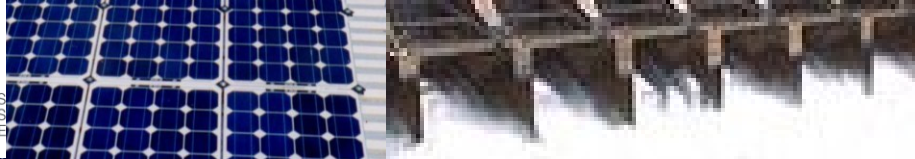
Desde cerca



Desde lejos



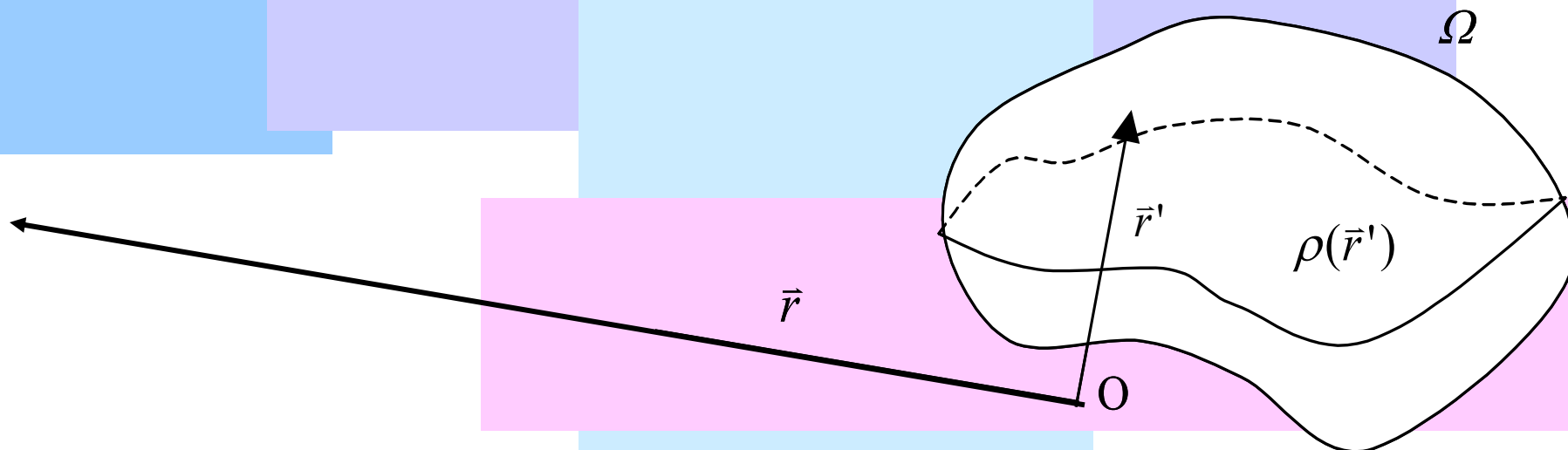
$$\vec{p} = -Q \frac{d}{4} \hat{i}$$

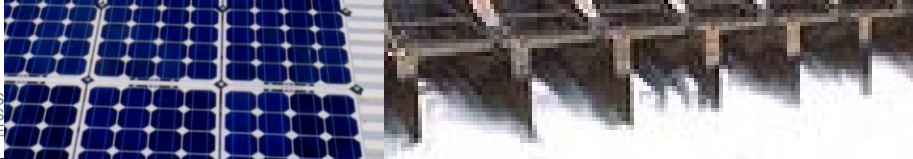


Momento dipolar de distribución volumétrica

Cuando hay distribuciones continuas de carga el momento dipolar es:

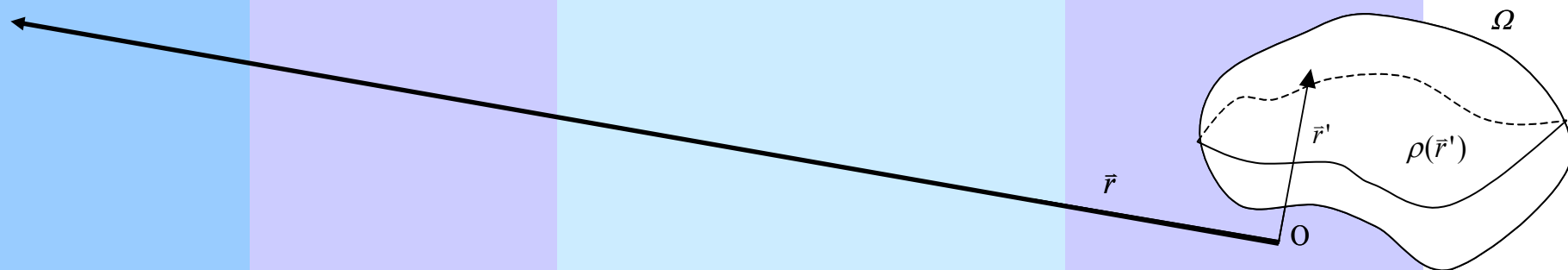
$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k \Rightarrow \vec{p} = \iiint \vec{r}' dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$





Momento dipolar de distribución volumétrica

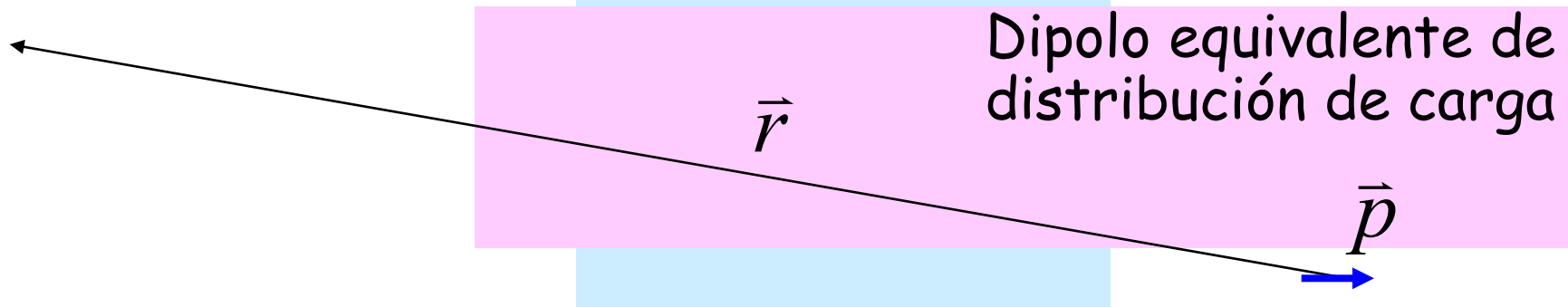
$$\vec{p} = \iiint \vec{r}' dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$





Momento dipolar de distribución volumétrica

$$\vec{p} = \iiint \vec{r}' dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$





Potencial a grandes distancias

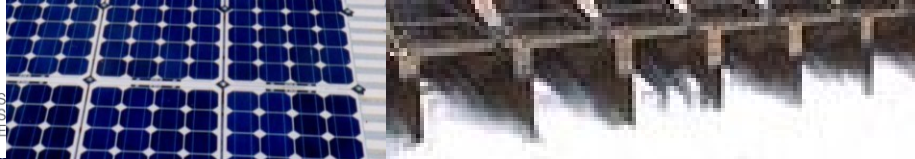
La expresión del potencial de una densidad de carga es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dv}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\text{Si } \|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\| \Rightarrow \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + TOS$$

Reemplazando en la expresión del potencial se obtiene:

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}\|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \rho(\vec{r}') dv' + TOS$$



Potencial a grandes distancias

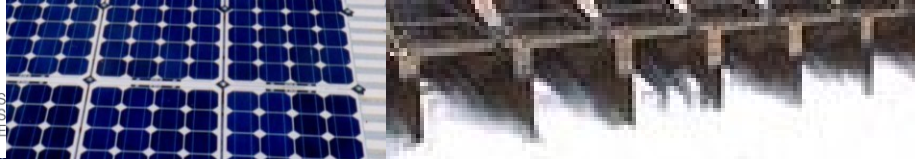
Dado que integral es función sólo de $\vec{r}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r}\|} \underbrace{\iiint \rho(\vec{r}') dv'}_{Q_{Total}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \bullet}{\|\vec{r}\|^3} \underbrace{\iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'}_{\vec{p}} + TO$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{Q_{Total}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} + TOS$$

$$\therefore V(\vec{r}) \approx \frac{Q_{Total}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3}$$

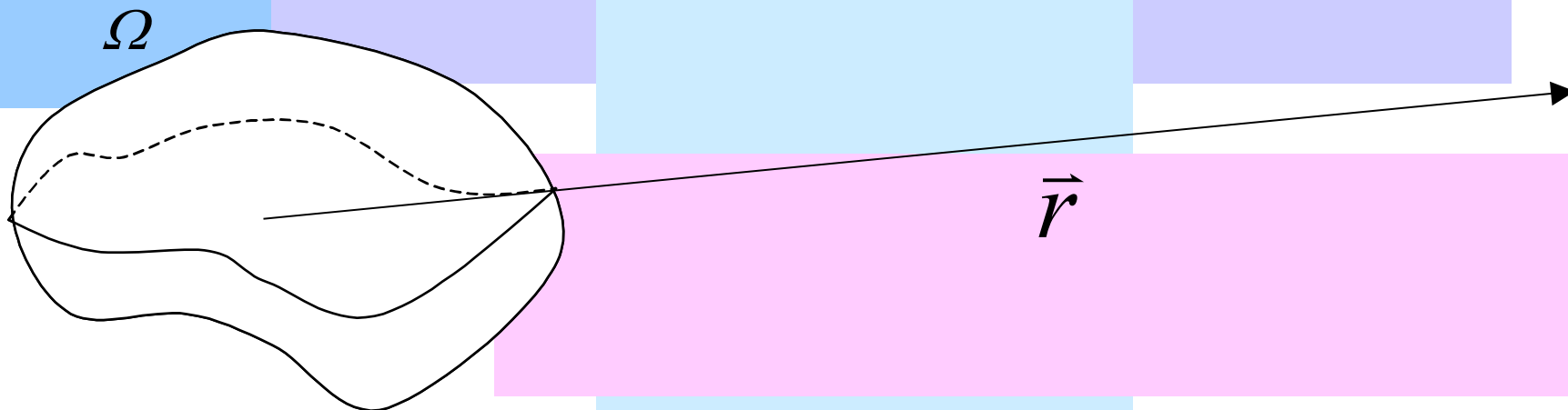
Potencial de
distribuciones de
carga a grandes
distancias

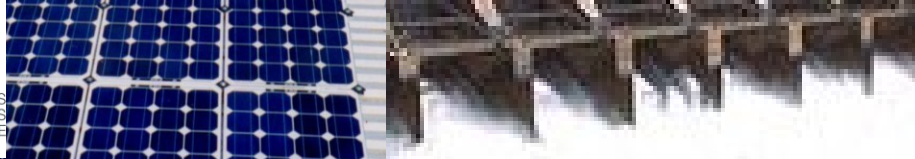


Potencial a grandes distancias

Luego para grandes distancias el efecto de una distribución de carga puede asimilarse a una carga concentrada Q_{Total} mas un dipolo $\vec{p}$:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q_{Total}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3}$$





Propuesto

Para el alambre cargado de la figura se pide estimar potencial y campo para grandes distancias $\|\vec{r}\| \gg l$. Intentar comparar con la solución exacta

