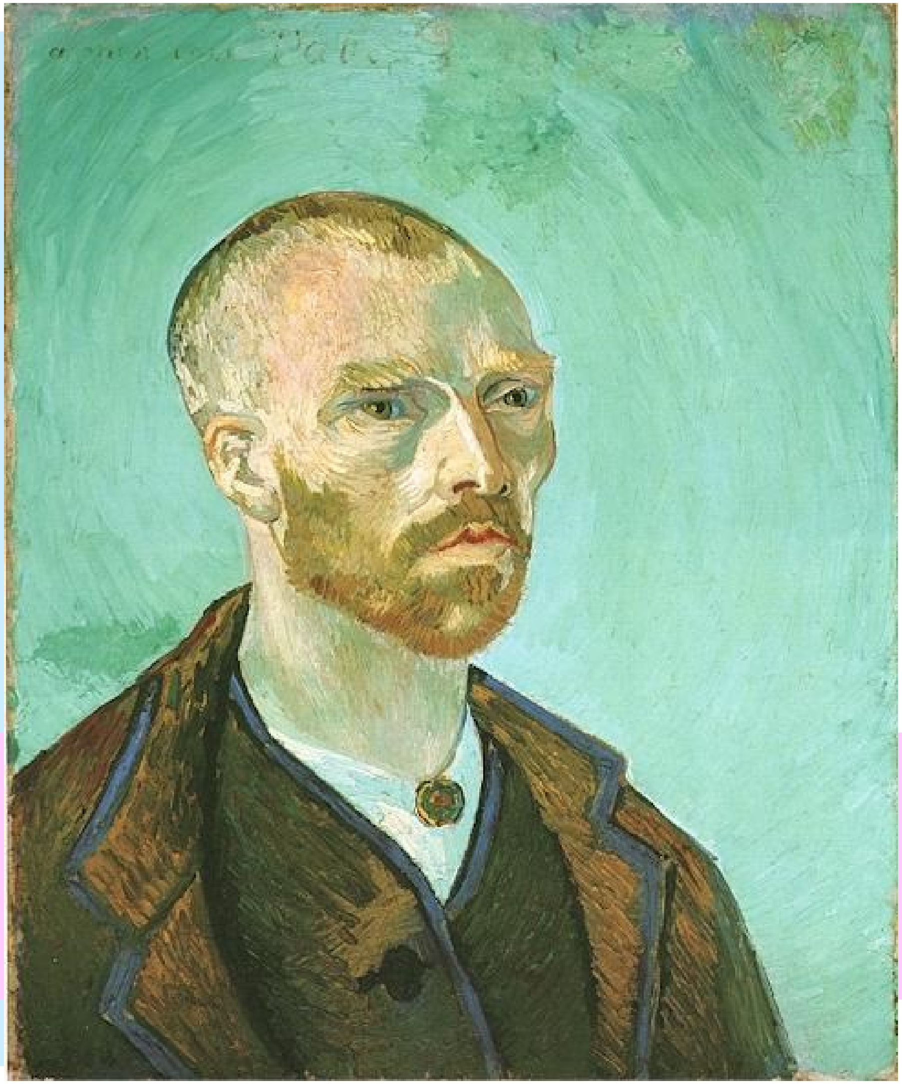
FI 2002 ELECTROMAGNETISMO Clase 3

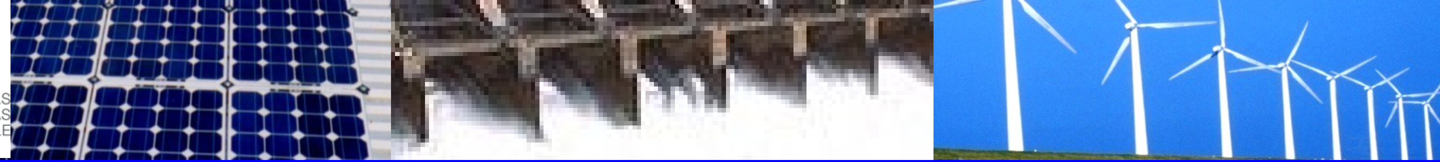
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Ley de Gauss
- 1a Ecuación de Maxwell
- Trabajo de campo eléctrico,
- Definición del potencial,
- Relación entre campo eléctrico y potencial



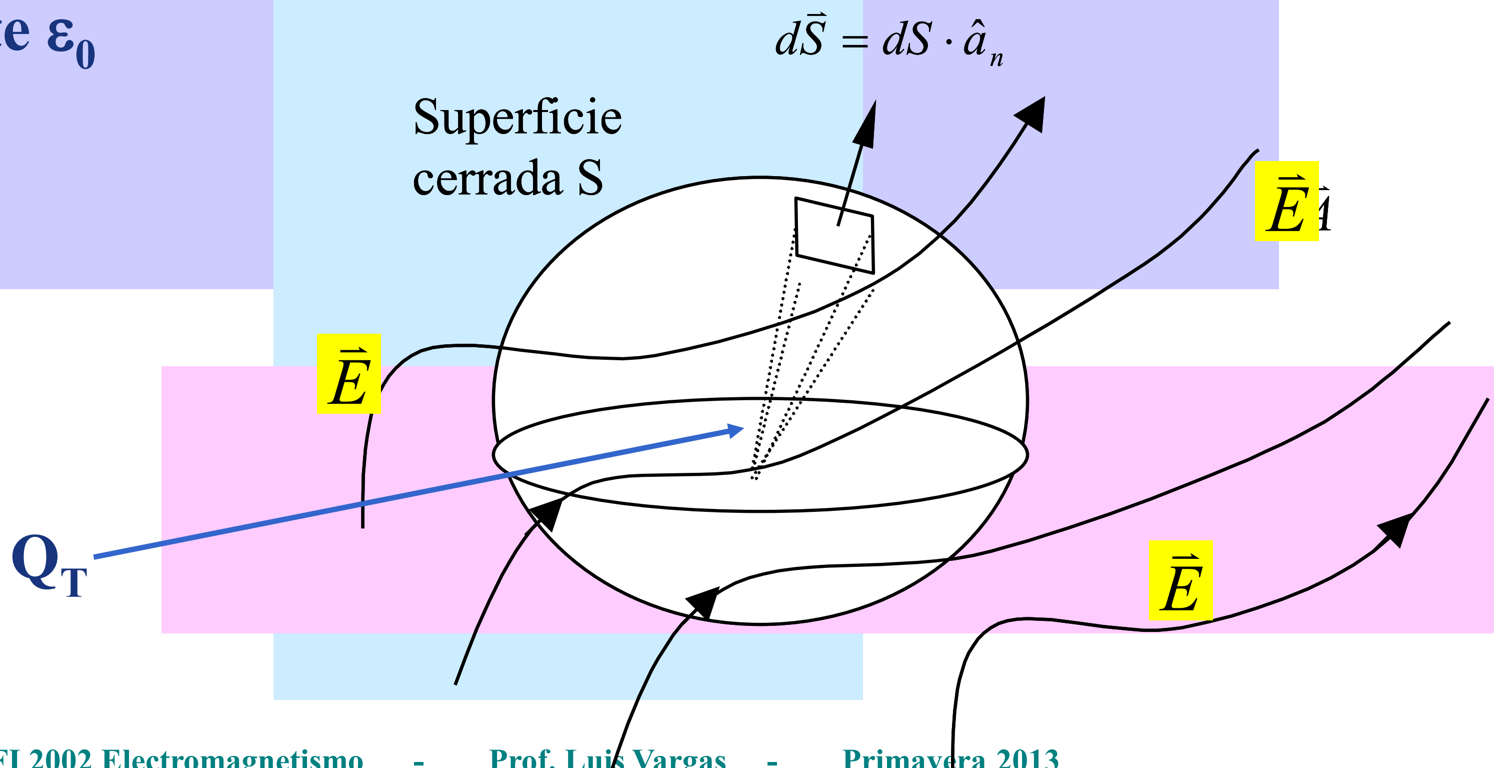
Van Gogh, "Autoretrato (dedicado a Paul Gaugin), Arles: Septiembre, 1888



Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0



1ª Ecuación de Maxwell

Dado que $$Q_T = \iiint_V \rho dv$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Entonces: $$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Las fuentes de campo son las cargas eléctricas

1ª Ecuación de Maxwell

Se define Vector Desplazamiento

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

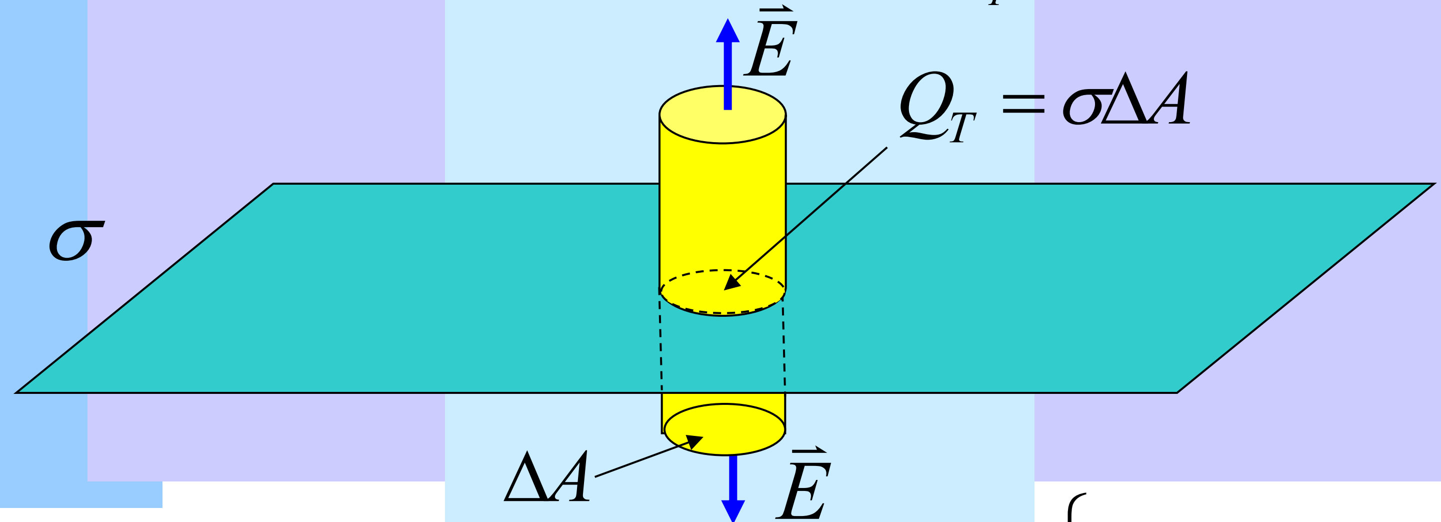
Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.

Comentarios sobre la Ley de Gauss

i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,
ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,
iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).

El Caso de los dos planos

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow \qquad \iint_{Manto} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0, \qquad \iint_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A \left\| \vec{E} \right\|$$



$$2\Delta A \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} & z < 0 \end{cases}$$

El Caso de los dos planos

Caso dos planos: Cargas positivas y $\sigma_1 > \sigma_2$

Hagámoslo primero por superposición

El Caso de los dos planos

Superposición

$$\vec{E}_1 = E_1\hat{k} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

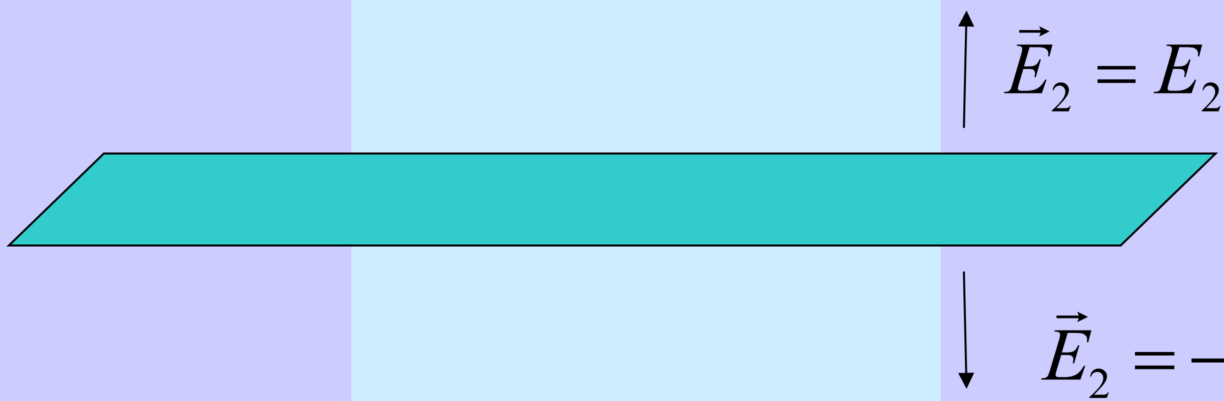
σ_1

$$\vec{E}_1 = -E_1\hat{k}$$

El Caso de los dos planos

Superposición

σ_2



$$\vec{E}_2 = E_2\hat{k} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -E_2\hat{k}$$

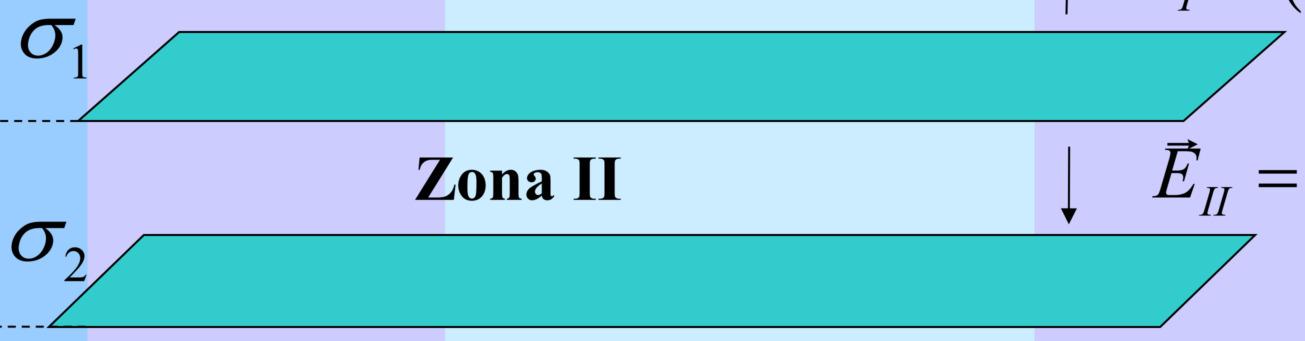
El Caso de los dos planos

Superposición

$\sigma_1 > \sigma_2$

Zona I

$$\vec{E}_I = (E_1 + E_2)\hat{k}$$

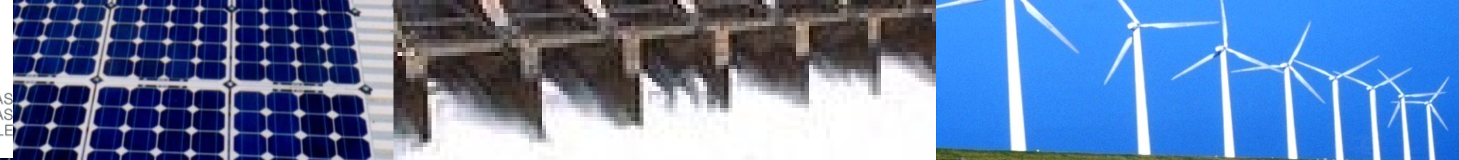


Zona II

$$\vec{E}_{II} = (E_2 - E_1)\hat{k}$$

Zona III

$$\vec{E}_{III} = -(E_1 + E_2)\hat{k}$$



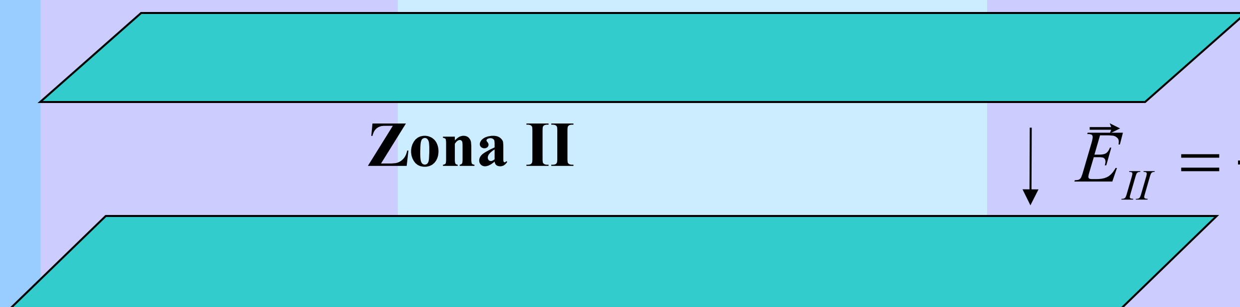
El Caso de los dos planos

Superposición

$\sigma_1 > \sigma_2$

Zona I

$$\vec{E}_I = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$



σ_1

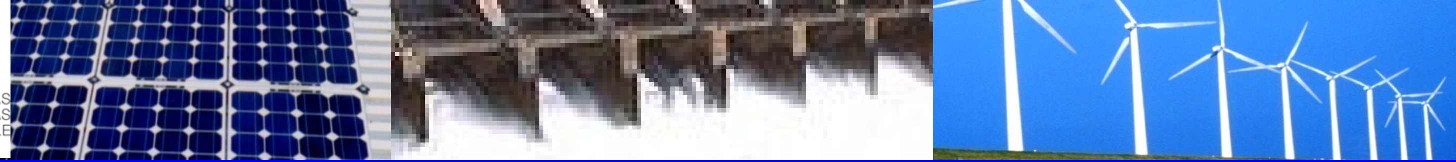
Zona II

$$\vec{E}_{II} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

σ_2

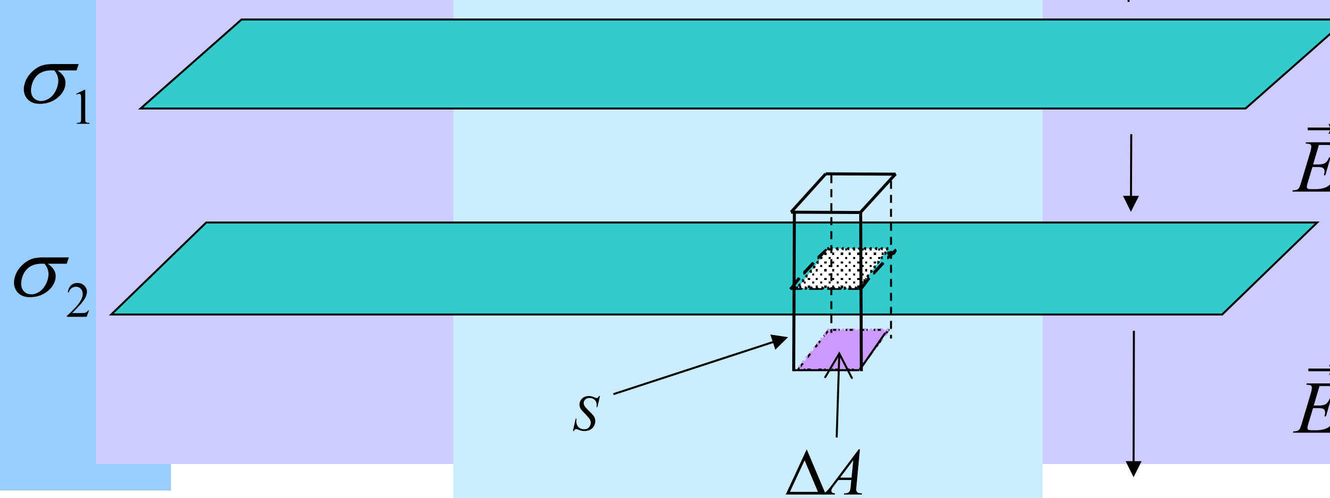
Zona III

$$\vec{E}_{III} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$



El Caso de los dos planos

Usemos Gauss $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \dfrac{Q_T}{\varepsilon_0}$



$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -E_2 \hat{k}$$

$$\vec{E}_3 = -E_3 \hat{k}$$

$$Q_T = \sigma_2 \Delta A$$

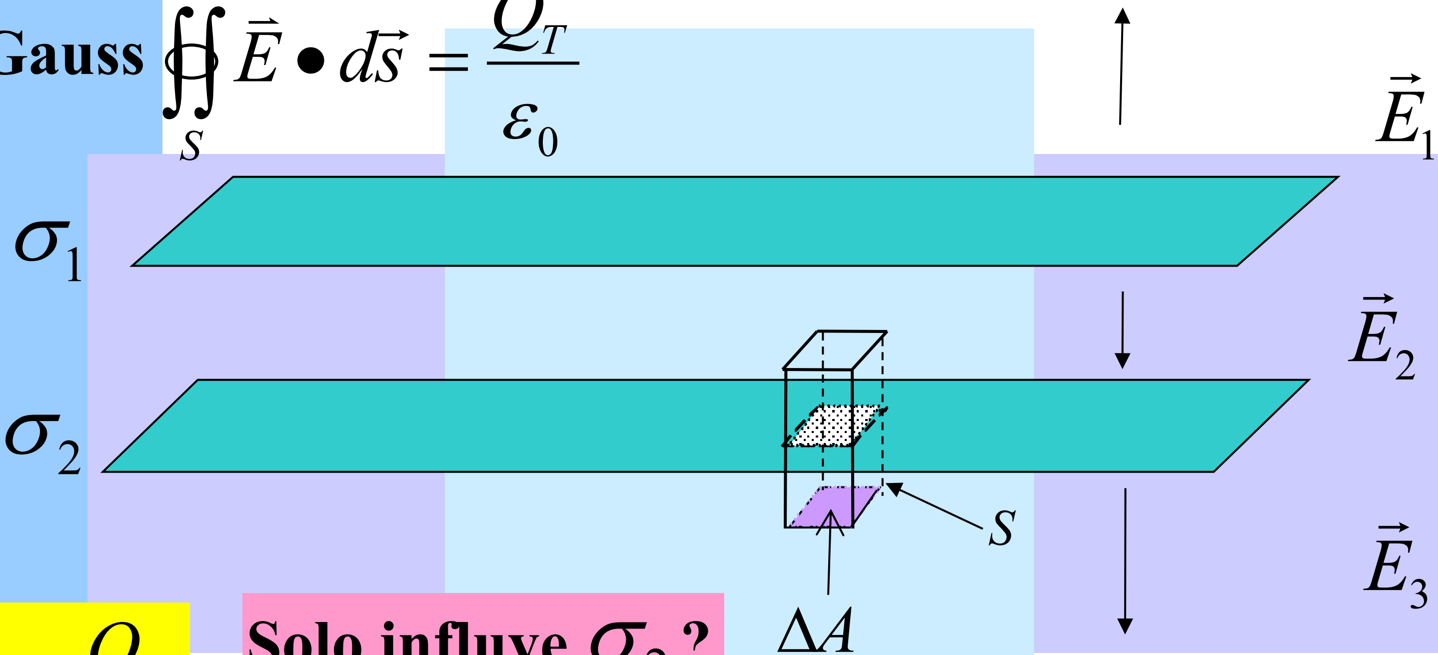
$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A$$

$$\left.\begin{matrix} Q_T = \sigma_2 \Delta A \\ \oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A \end{matrix}\right\} - E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

OJO: Campos son diferentes!

El Caso de los dos planos

Usemos Gauss $\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \dfrac{Q_T}{\varepsilon_0}$



$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Solo influye σ_2?

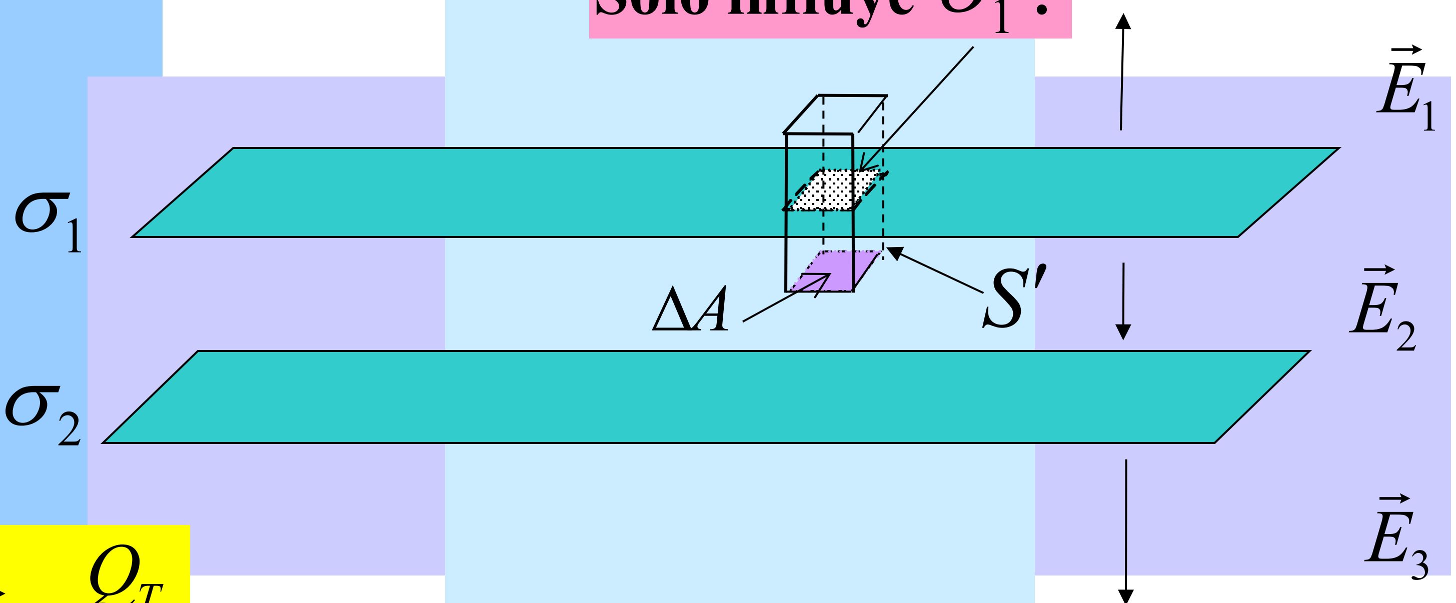
$$\left.\begin{aligned} Q_T &= \sigma_2 \Delta A \\ \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} &= -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A \end{aligned}\right\} \quad -E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

OJO: Campos son diferentes!

El Caso de los dos planos

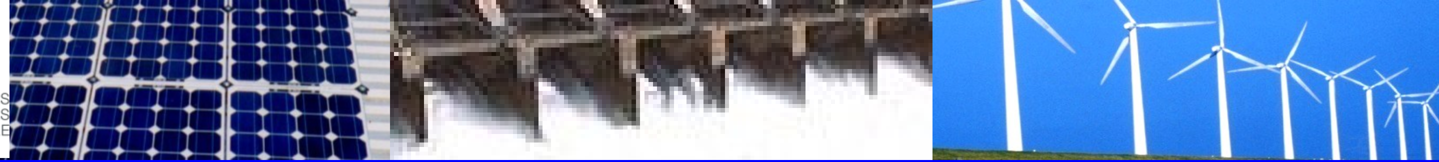
Usemos Gauss

Solo influye σ_1 ?

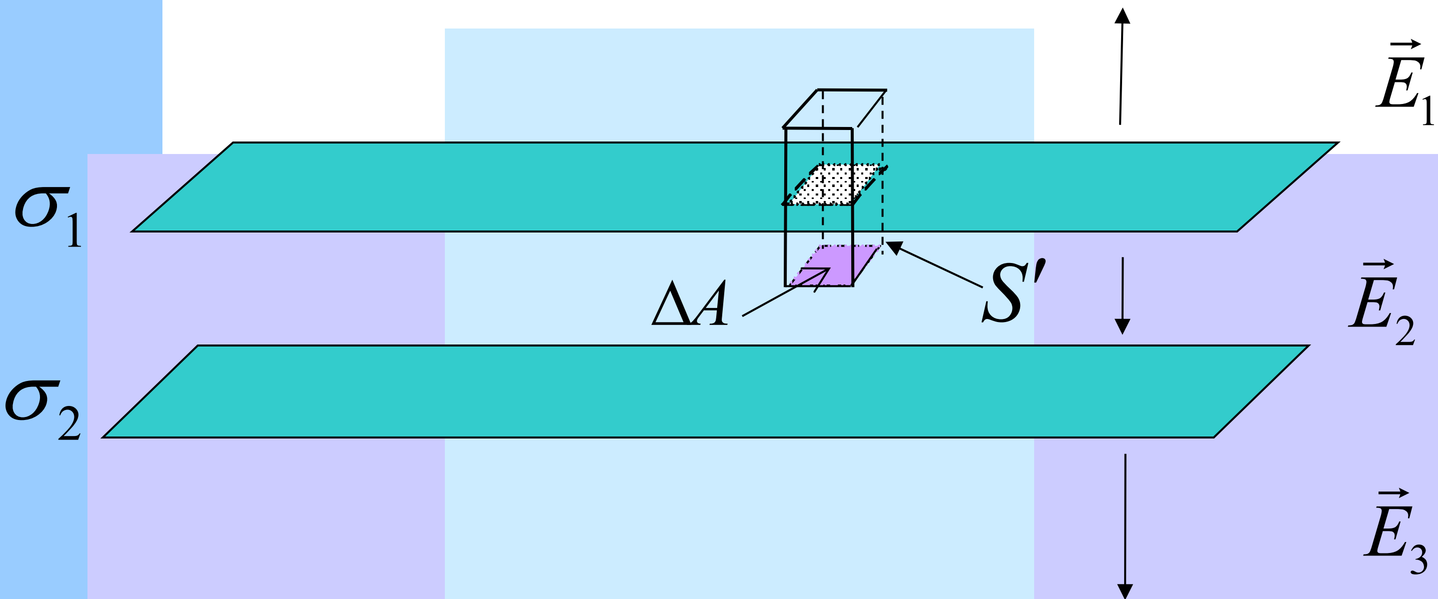


$$\oint\!\!\!\oint_{S'} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_T &= \sigma_1 \Delta A \\ \oint\!\!\!\oint_{S'} \vec{E} \bullet d\vec{s} &= E_1 \Delta A + E_2 \Delta A \end{aligned}\right\} \quad E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$



El Caso de los dos planos



Tenemos

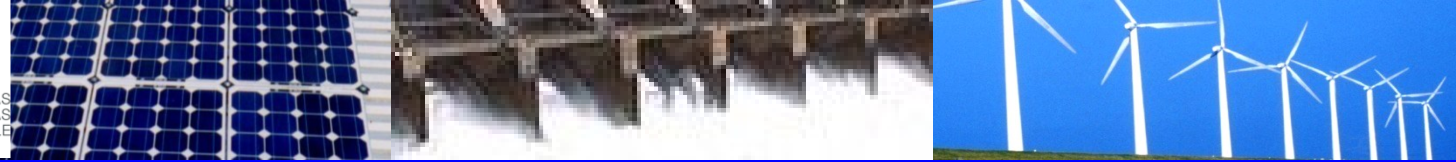
$$-E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Pero $E_1 = E_3 \Rightarrow$

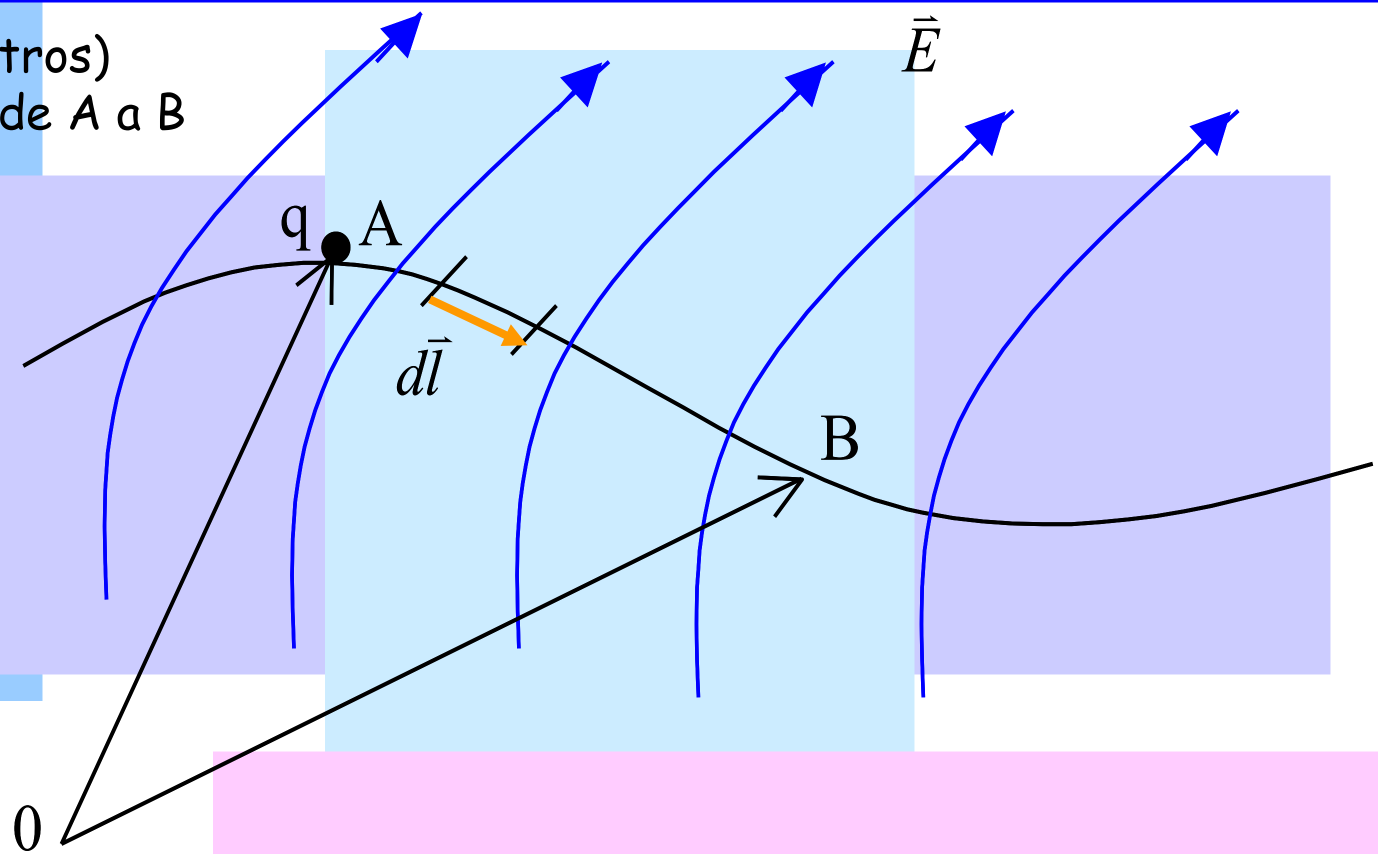
$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$



Trabajo de un Campo Eléctrico

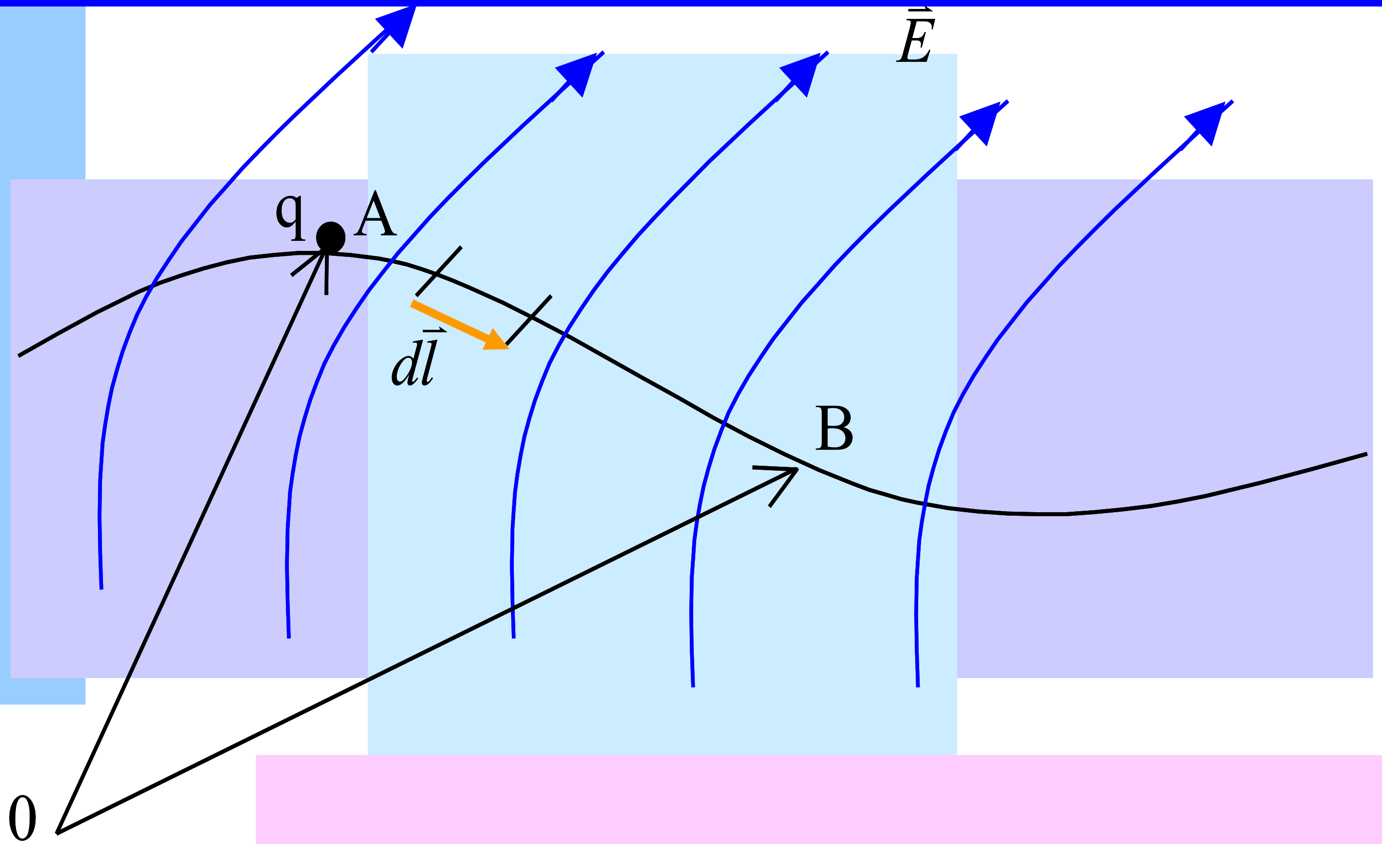
Deseamos (nosotros) llevar carga desde A a B



Si W >0 Trabajo lo realiza agente externo (nosotros)

Si W < 0 Trabajo lo realiza campo ($\vec{F} = q\vec{E}$)

Trabajo de un Campo Eléctrico



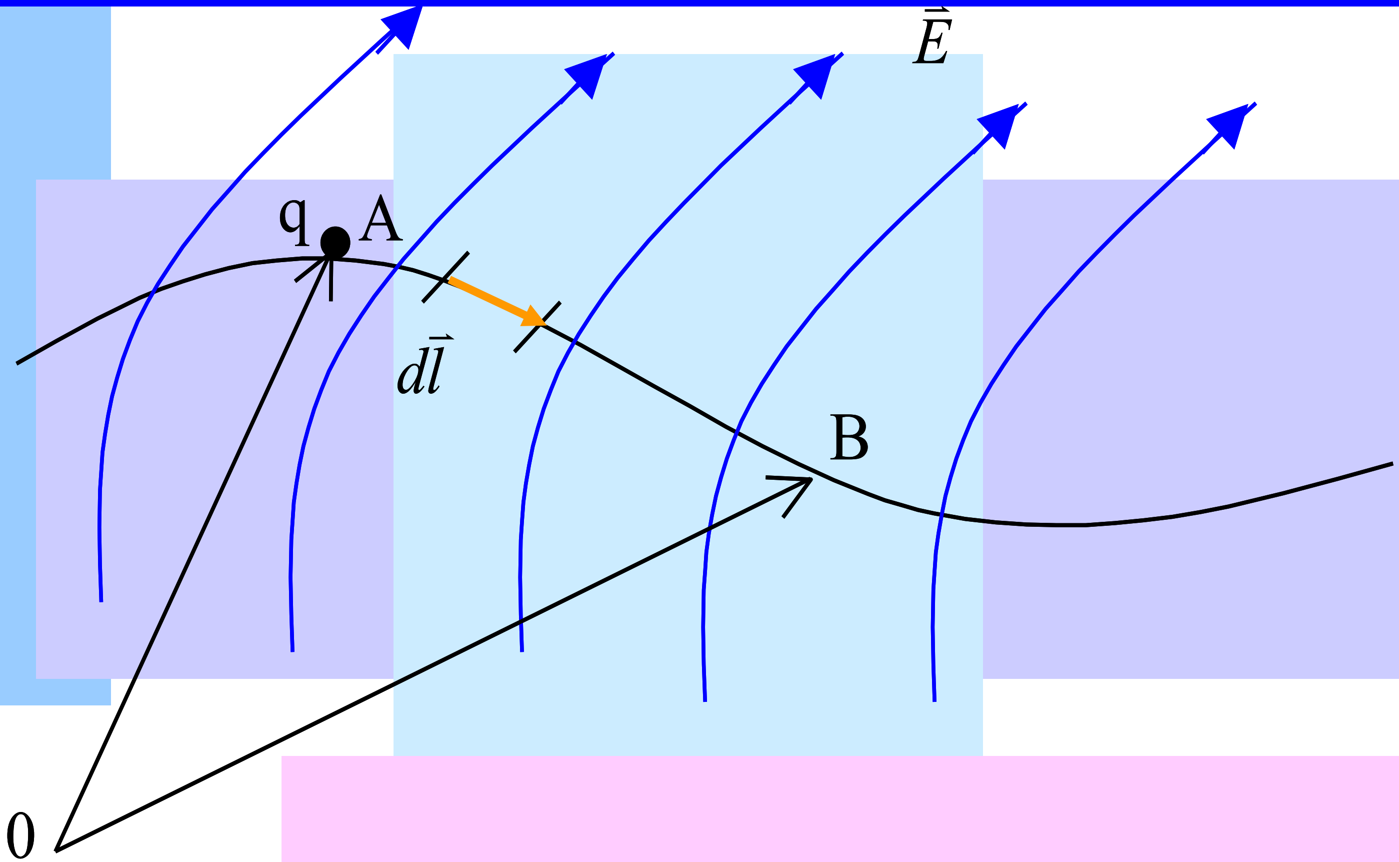
Fuerza ejercida por campo eléctrico

$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Si W >0 Trabajo lo realiza agente externo

Si W < 0 Trabajo lo realiza campo

Trabajo de un Campo Eléctrico

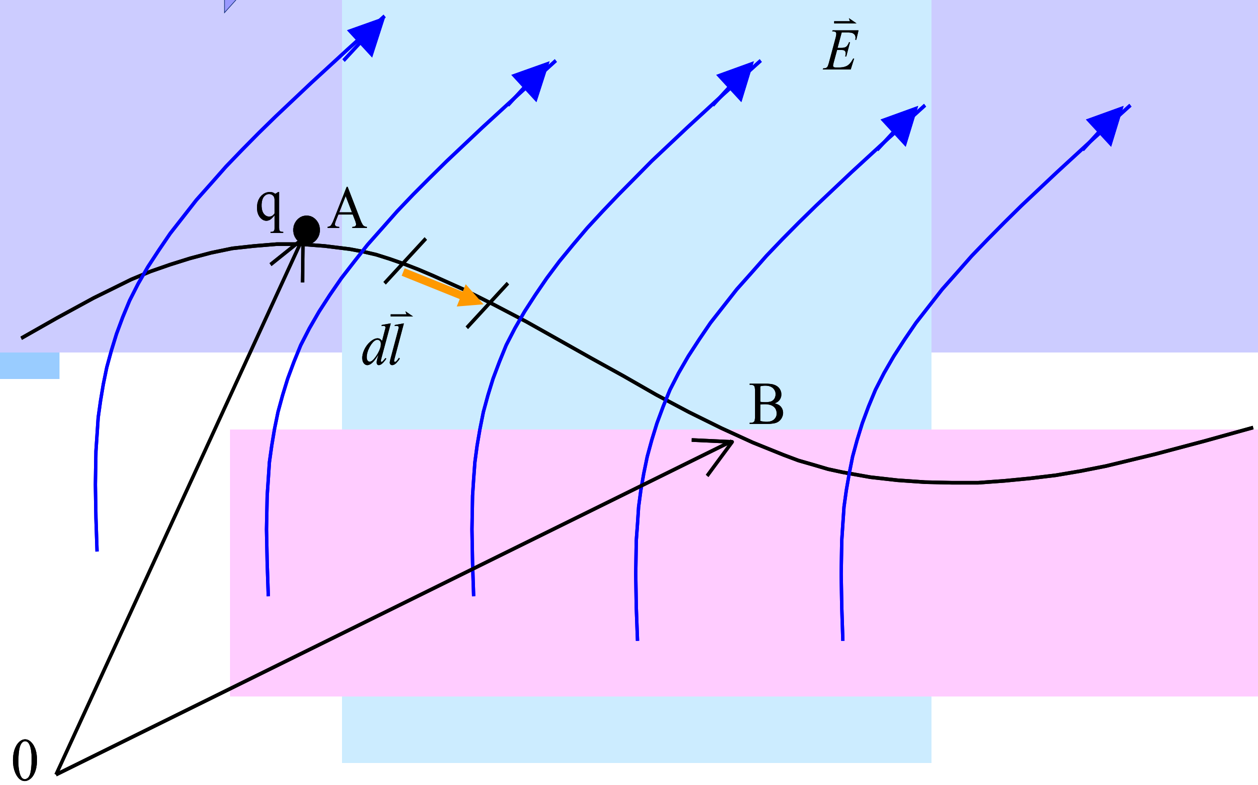


$$W = \int_A^B dW \qquad dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Definición de potencial

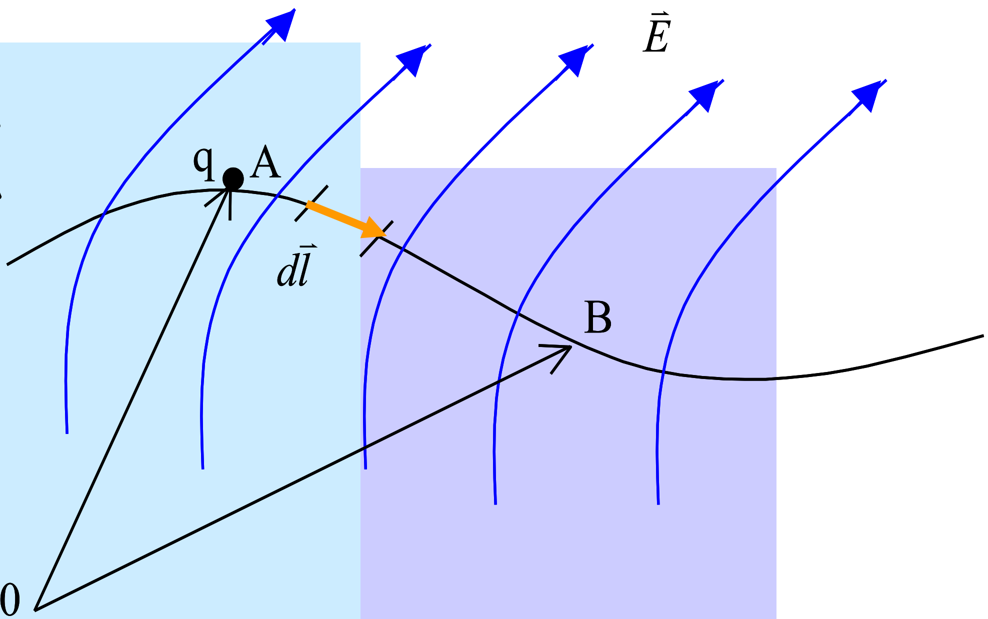
Si W>0 → Trabajo lo realiza agente externo

Si W< 0 → Trabajo lo realiza campo eléctrico



Definición de potencial

Se define como diferencia de potencial eléctrico entre B y A a la energía potencial eléctrica entre A y B por unidad de carga

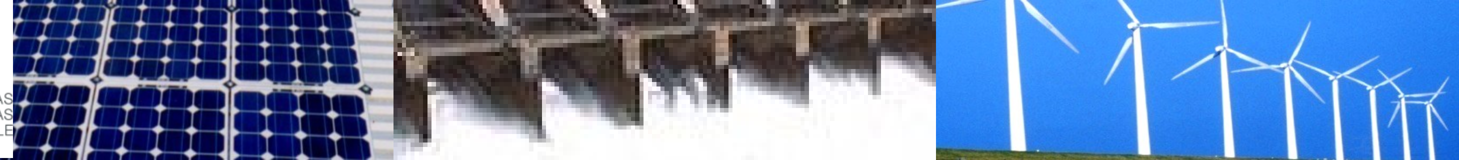


$$V_{BA} = \frac{W}{q}$$

En términos diferenciales

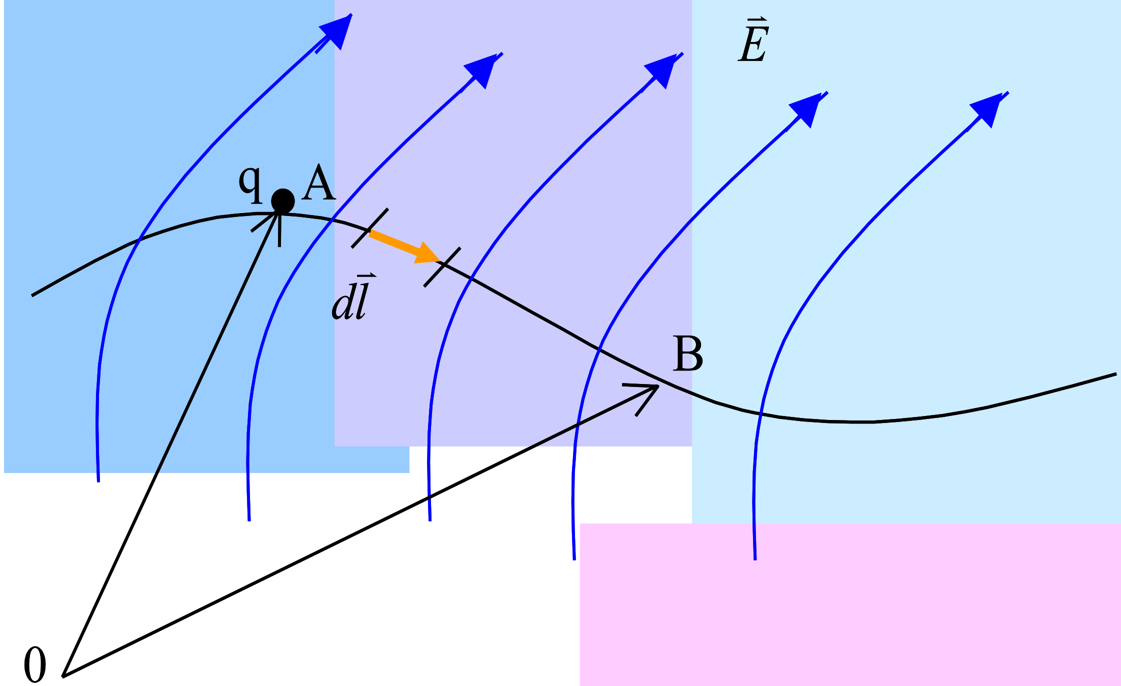
$$dV = \frac{dW}{q} = -\vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$



Definición de potencial

Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA}, como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga necesaria para llevar q de A a B.

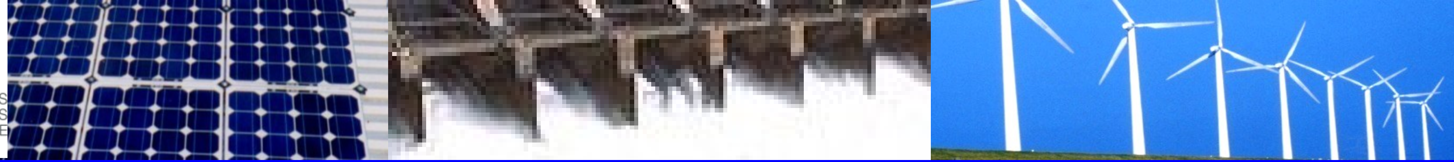


$$\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\therefore V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\therefore \quad V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Unidades de [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]



Definición de potencial

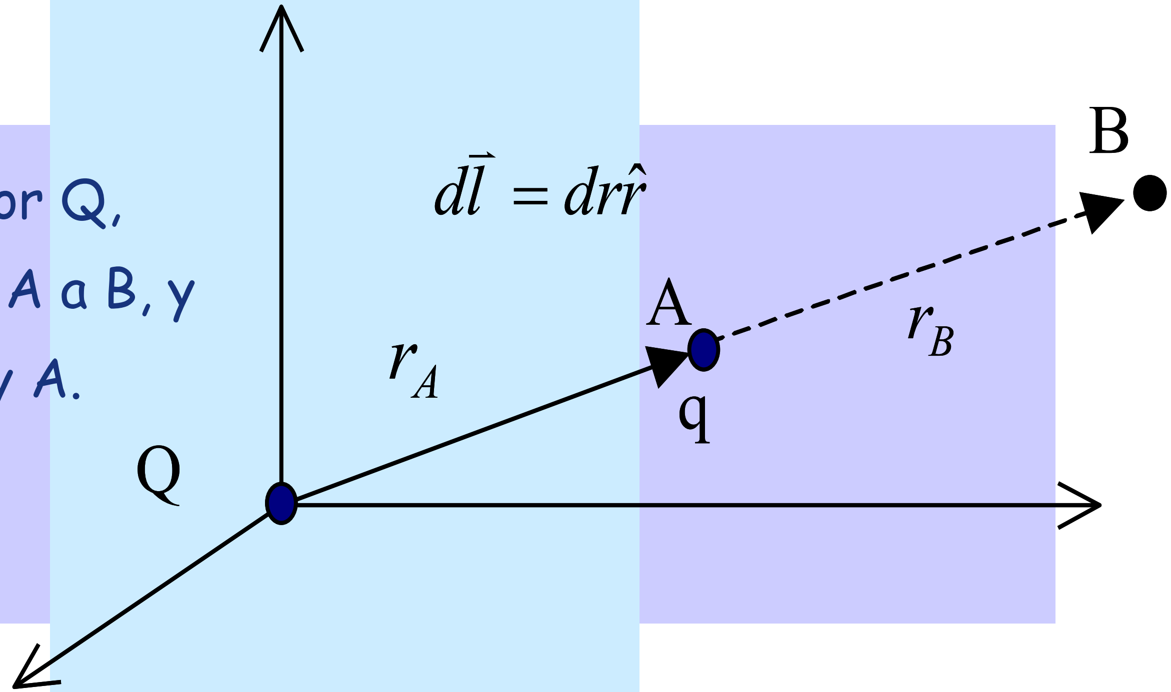
Ejemplo 10.

Calcular:

i. Campo E producido por Q,

ii. El trabajo para ir de A a B, y

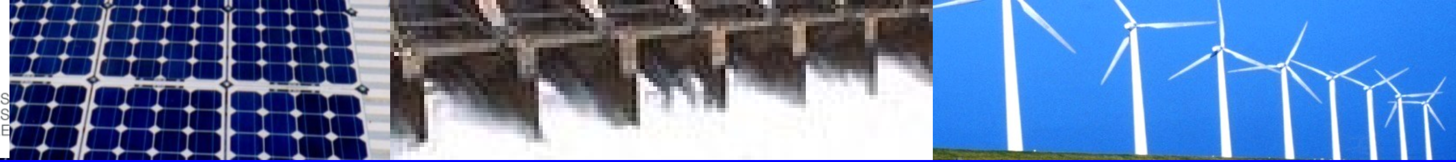
iii. El potencial entre B y A.



Sol^n

i.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



Ejemplo cálculo de potencial

ii.

$$W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

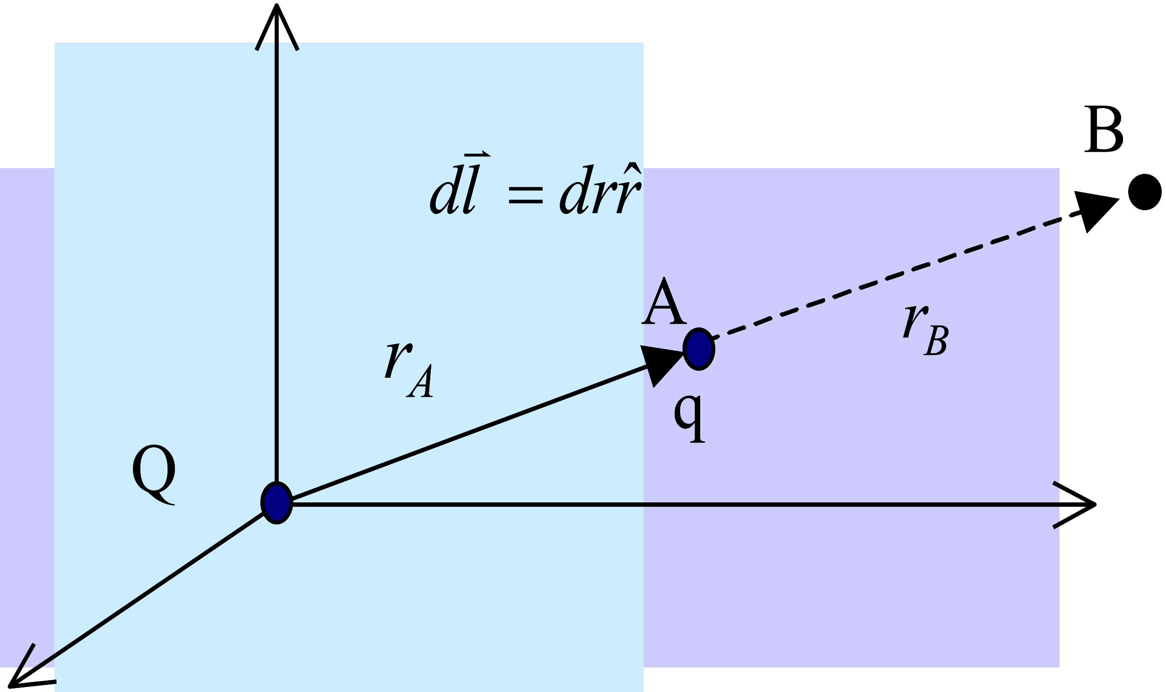
$$W = -q\int_{r_A}^{r_B} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet \hat{r}$$

$$W = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

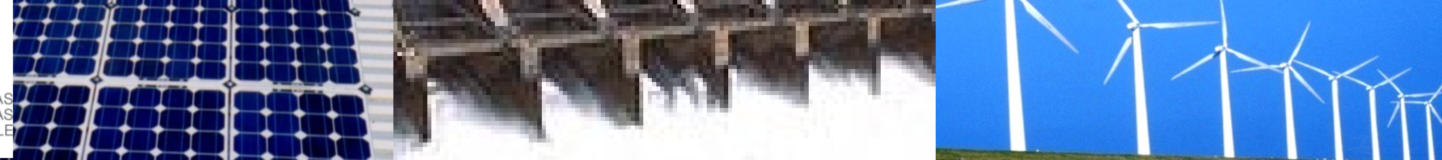
$$W == q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\therefore \quad W = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right]$$



Dado que $r_A < r_B$:

- Si q y Q del mismo signo, W es negativo y trabajo lo hace campo (cargas se repelen)
- Otro caso, W positivo y trabajo lo hace agente externo (hay que vencer atracción entre cargas)



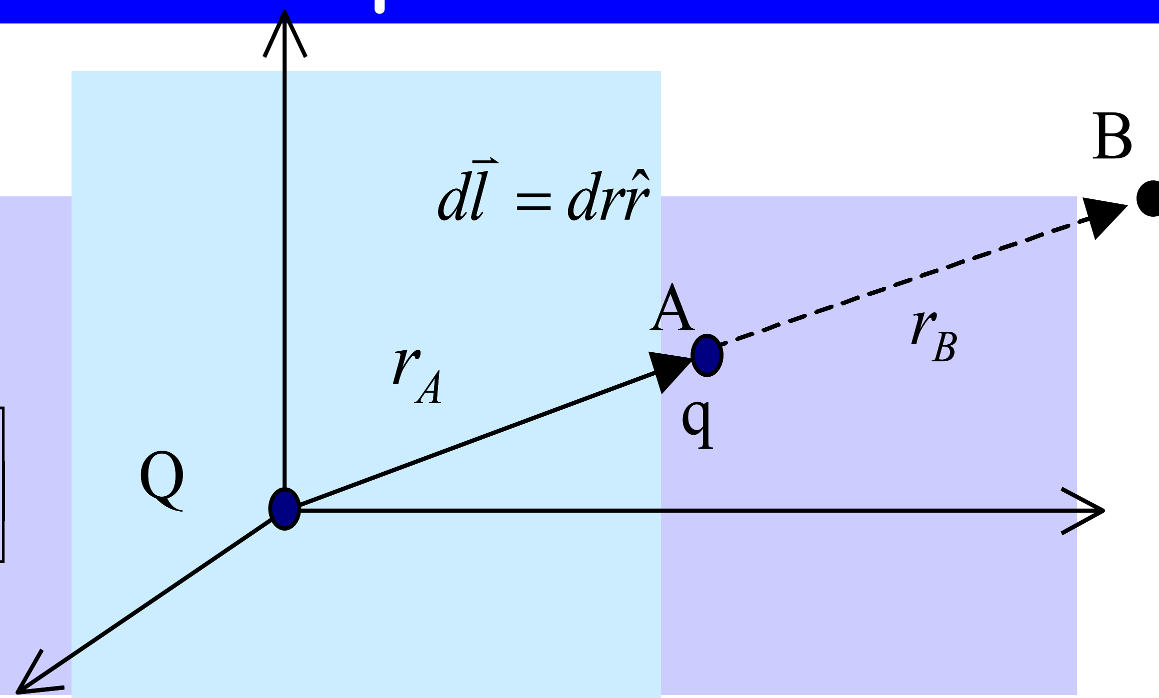
Ejemplo cálculo de potencial

iii.

$$V_{BA} = \frac{W}{q}$$

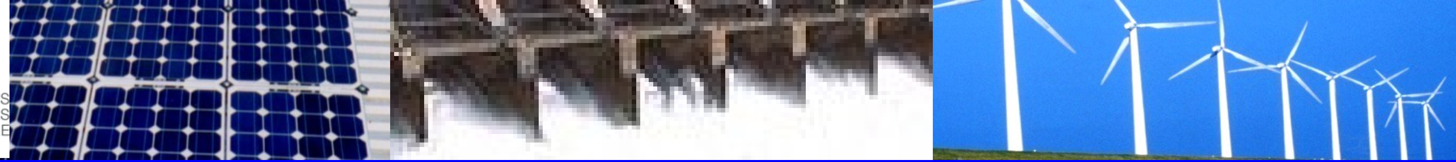
$$W = q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right]$$

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{qQ}{q4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right]$$



$$\therefore\ V_{BA} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right]$$

- Si Q es positiva la diferencia de potencial entre B y A es negativa
- Campo va desde **mayor potencial a menor potencial**

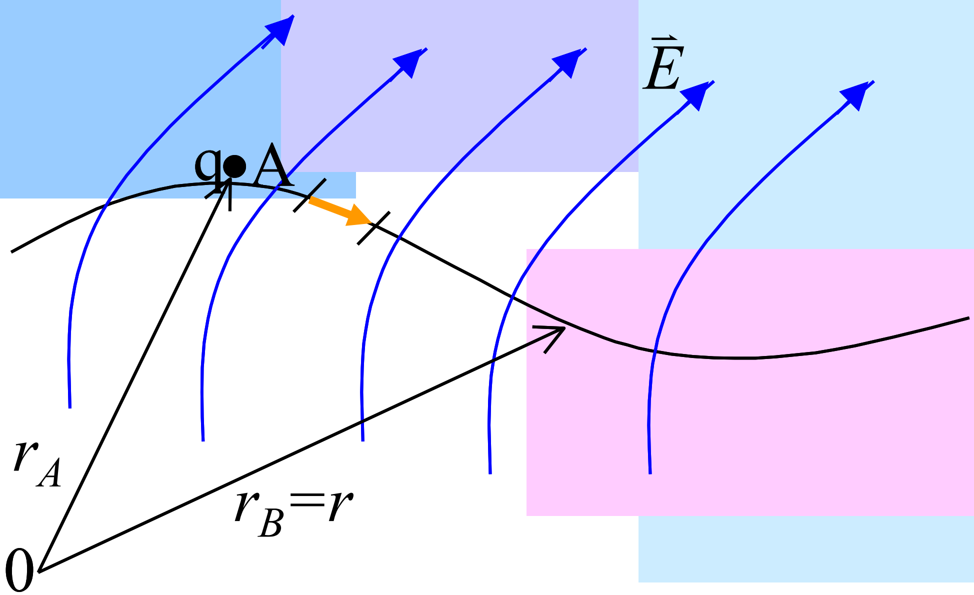


Definición de Potencial

Notar que la expresión para la diferencia de potencial V_{BA} **no** depende de q, sin que sólo del campo

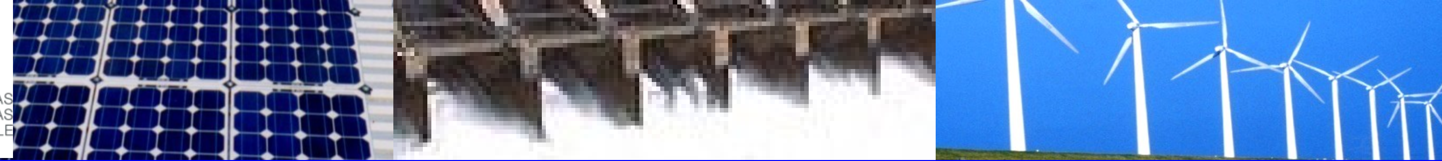
$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Si hacemos $r_B = r$ variable, podemos definir una función potencial en todo el espacio.



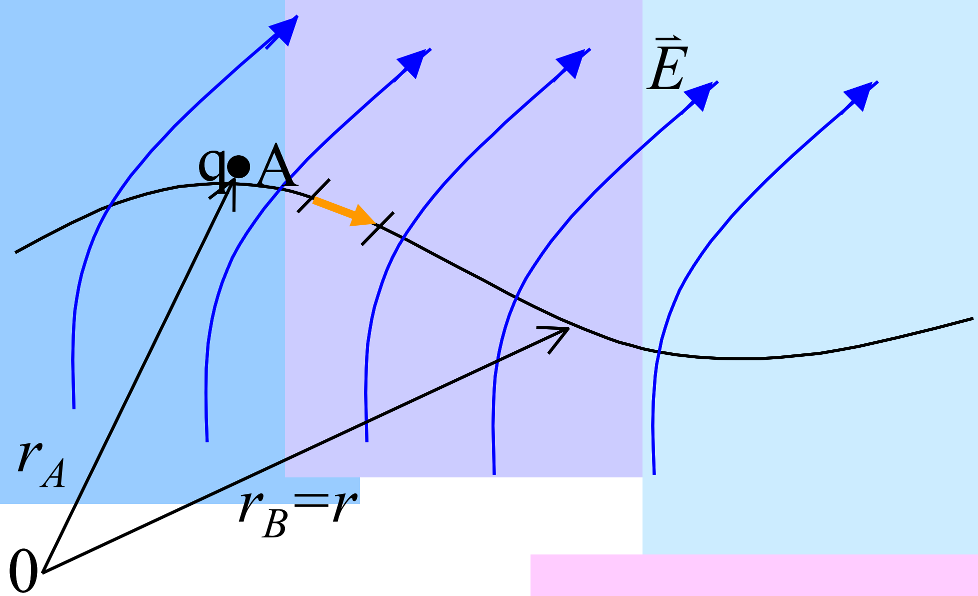
$$V(\vec{r}) - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Trabajo por unidad de carga para ir desde r_A a r



Definición de Potencial

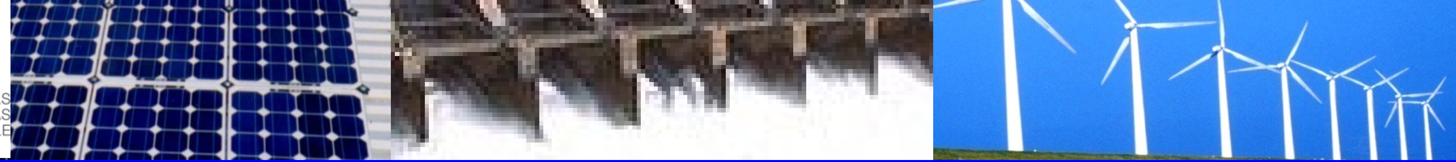
Si hacemos $r_B=r$ variable, podemos definir una función potencial en todo el espacio.



Trabajo por unidad de carga para ir desde r_A a r

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right] + V_A$$

Notar que la función potencial está referida a una referencia, en este caso $V(\vec{r} = \vec{r}_A) = V_A$

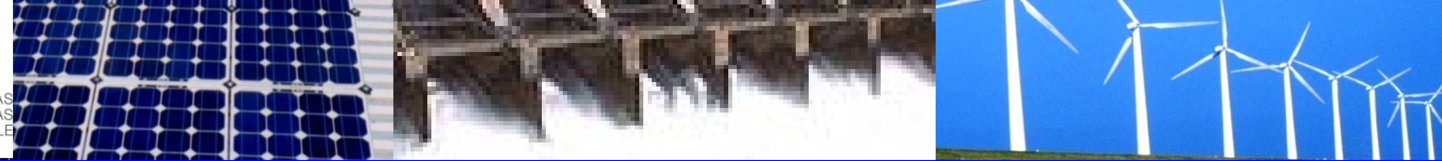


Definición de potencial

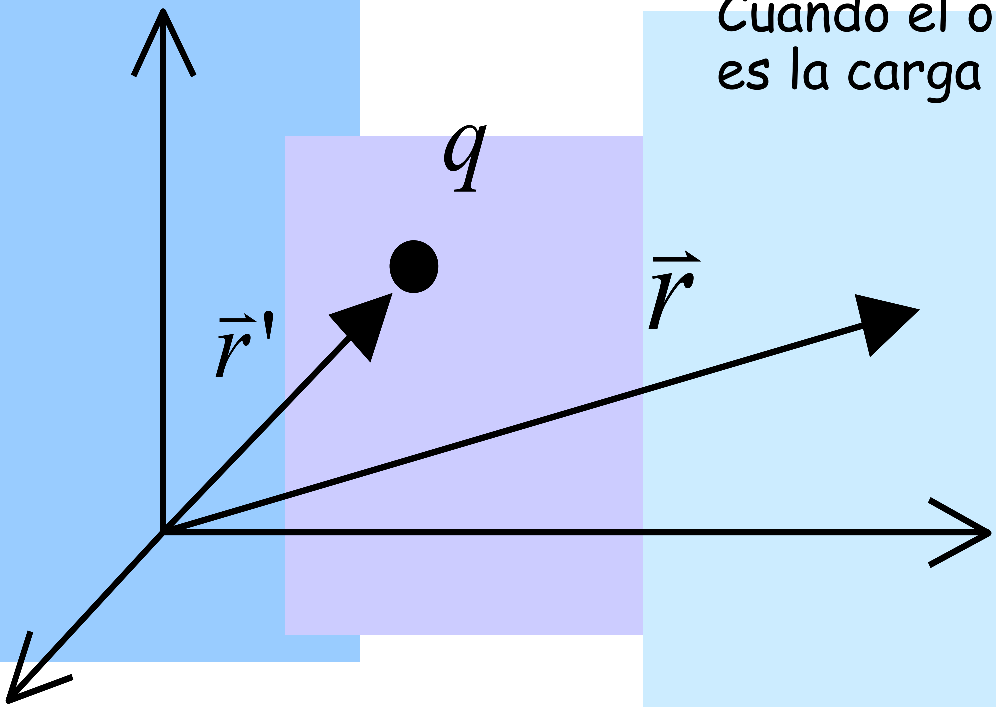
Haciendo tender $r_A \to \infty$ y definiendo arbitrariamente $V(\infty)=0$, se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right] + V(\infty) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|}}$$

- Trabajo por unidad de carga para traer esa carga desde el infinito a *r*
- Función potencial eléctrico es un campo escalar
- Función potencial eléctrico requiere de una referencia para su definición, generalmente se usa $V(\vec{r} = \vec{r}_A \to \infty) = V_\infty = 0$. Pero no siempre!
- Notar que la física del fenómeno, esto es, la fuerza o el trabajo no dependen de la referencia adoptada.



Definición de potencial



Cuando el origen del sistema de referencia es la carga q

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

En un sistema de referencia cualquiera

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

V es una función lineal con la carga, luego cumple con superposición al igual que campos

Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_1 \|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_2 \|} + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_n \|}$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k \|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|}$$

Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y haciendo B variable

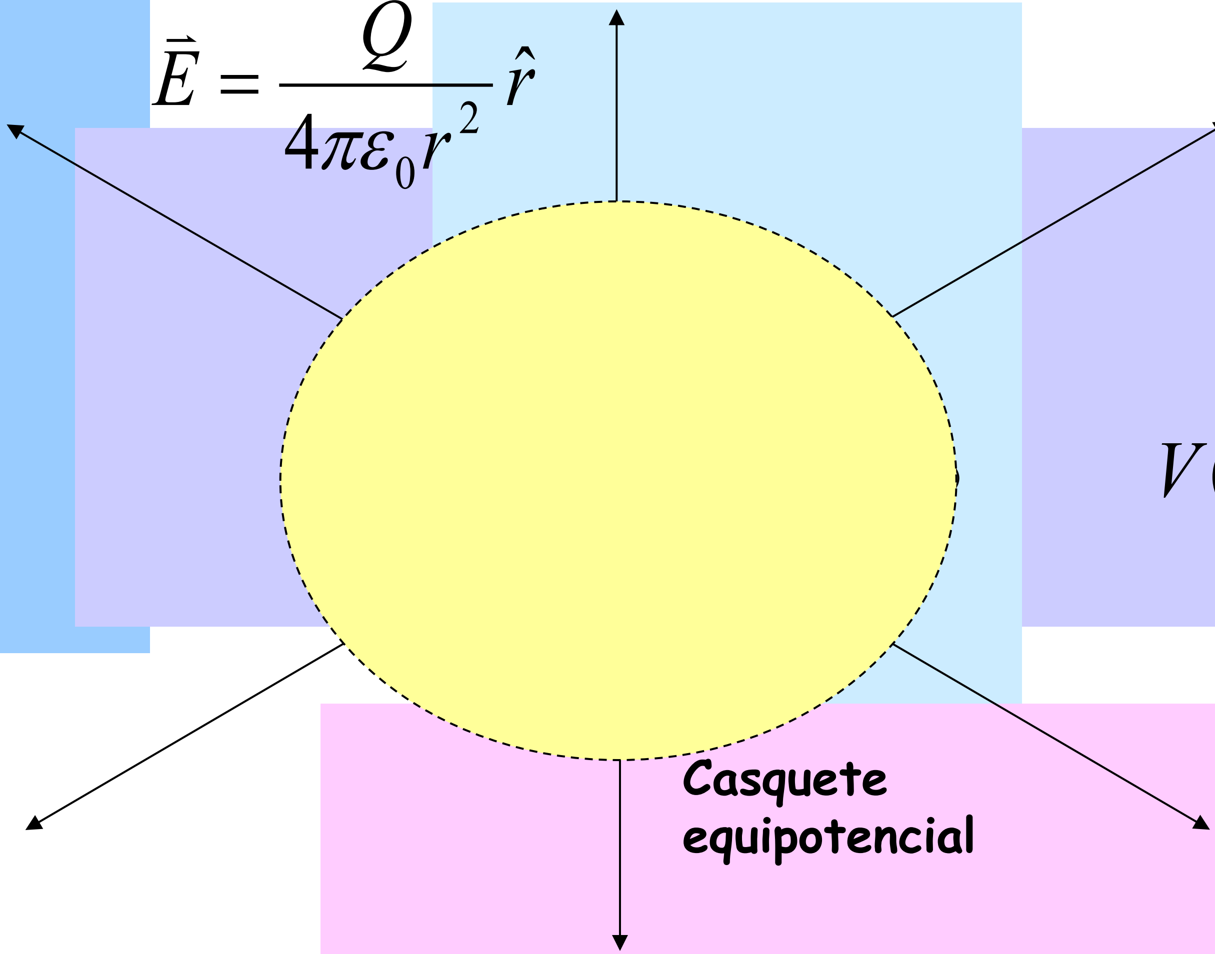
$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Campo eléctrico y potencial de carga

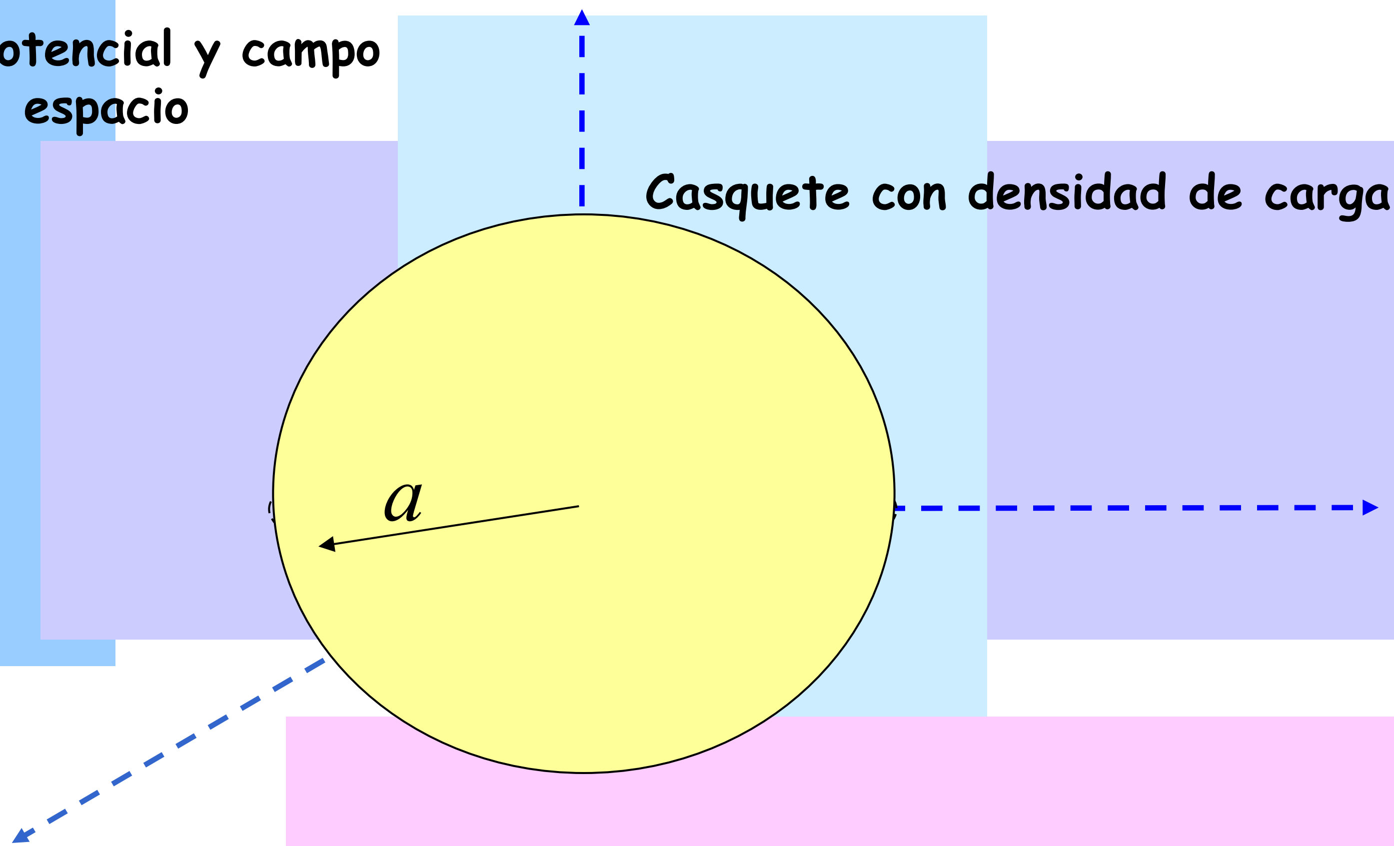
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

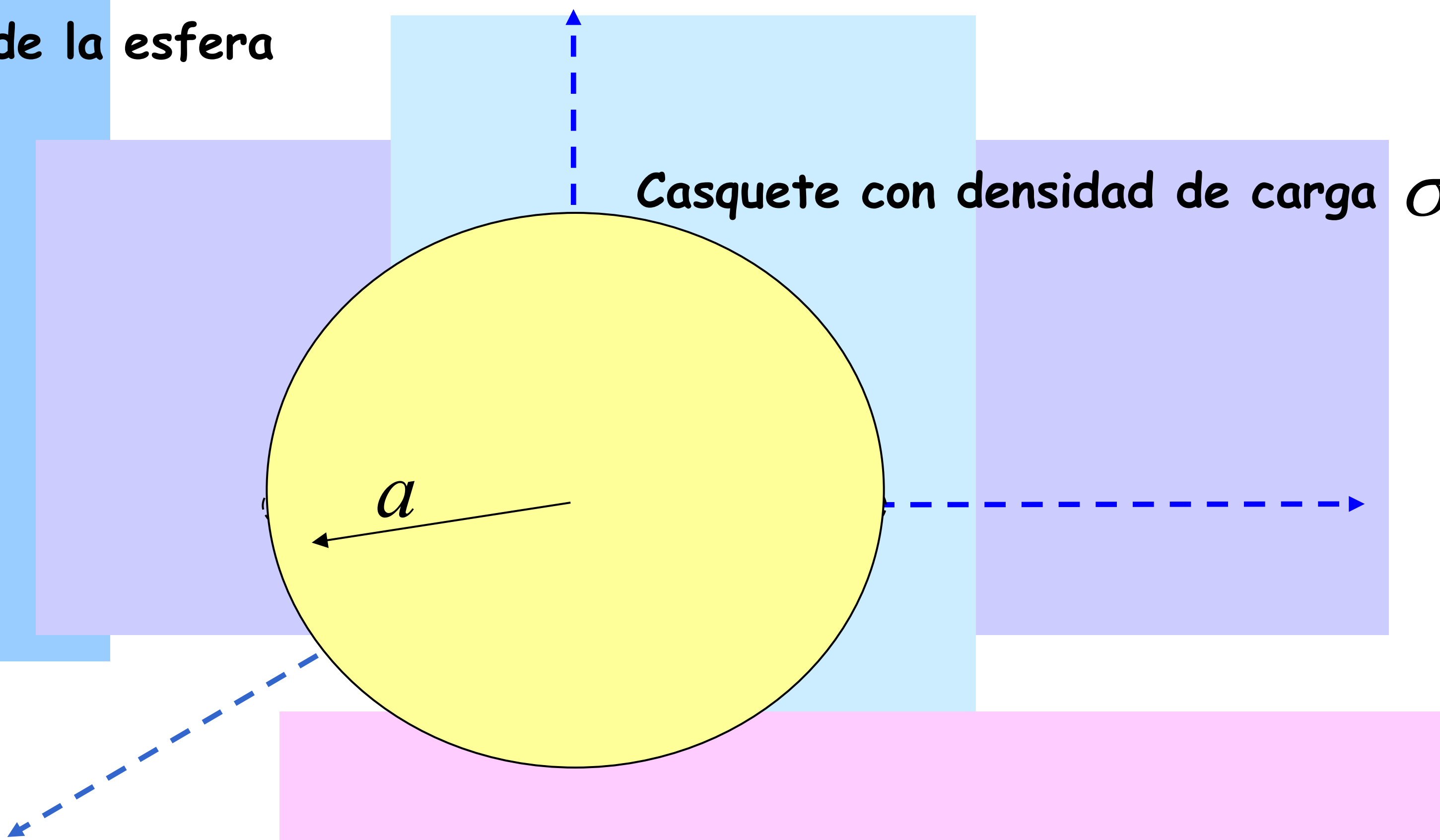
Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio



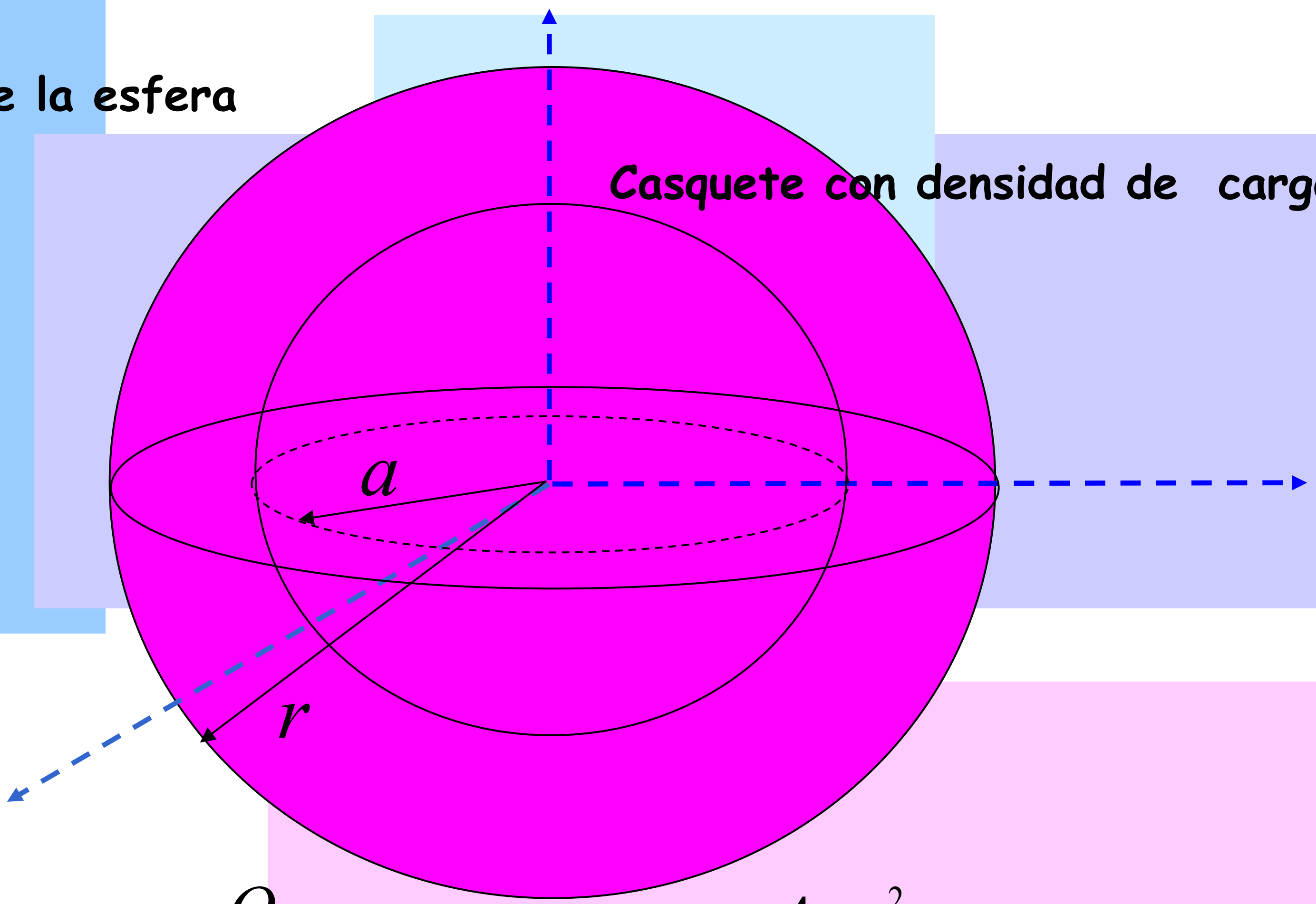
Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

I. Fuera de la esfera



Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

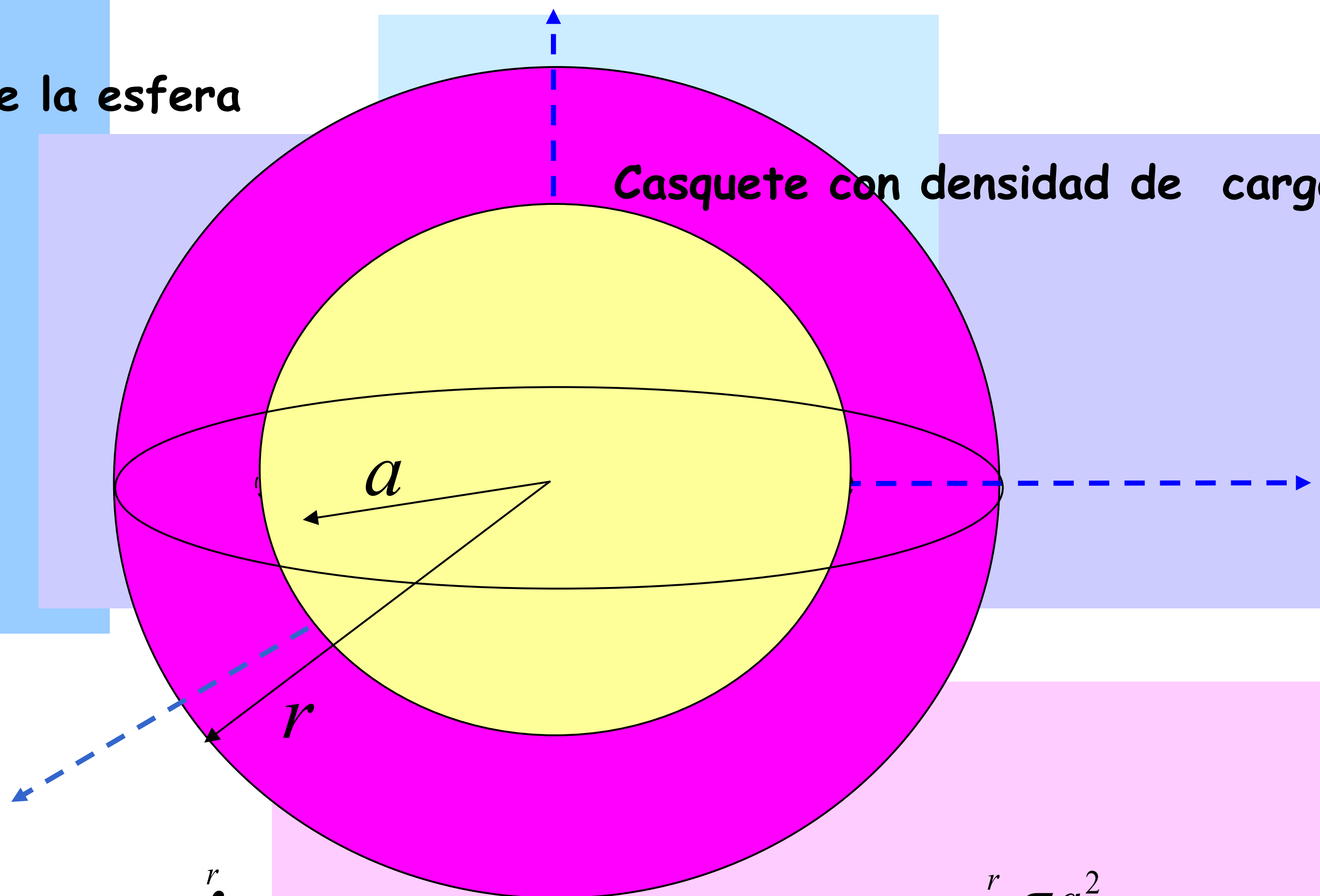
I. Fuera de la esfera



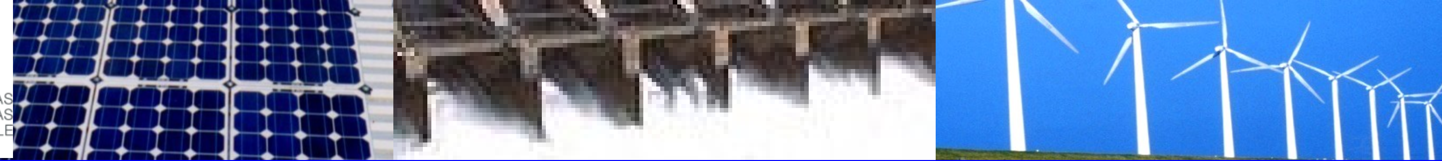
$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{a^2 \sigma}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

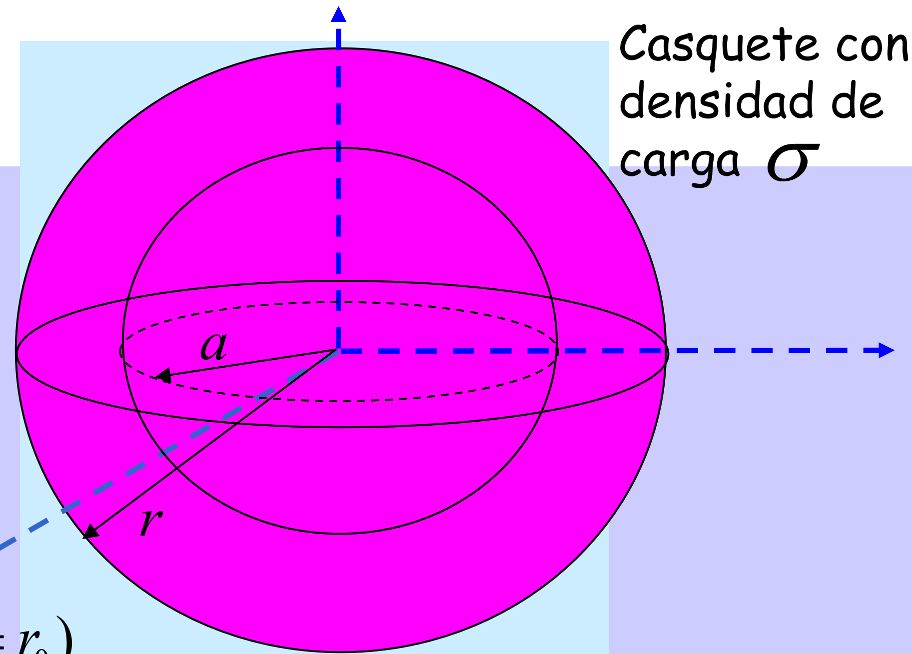
I. Fuera de la esfera



$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref} \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \bullet dr\hat{r} + V_{ref}$$



Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete



Casquete con densidad de carga σ

I. Fuera de la esfera

$$V(\vec{r}) = \left.\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r}\right|_{r_0}^{r} + V_{ref}(r = r_0)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r} - \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r_0} + V_{ref}(r = r_0)$$

Tomando como referencia el infinito, es decir, $V_{ref}(r = r_0 \to \infty) = 0$

$$\Rightarrow \quad V(\infty) = +0 - 0 + V_{ref} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r}$$

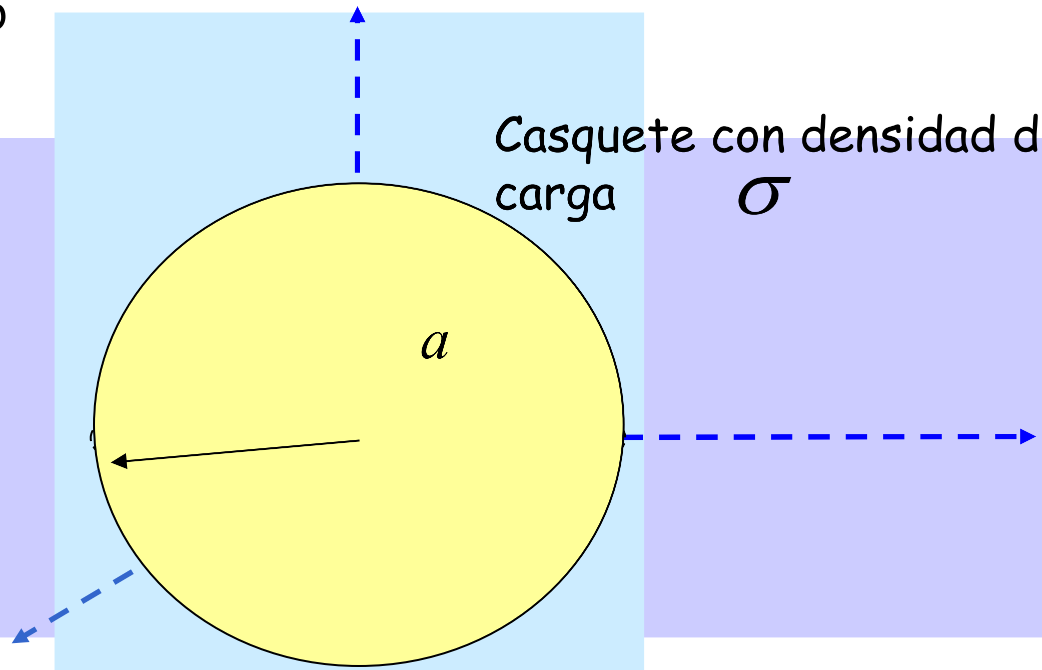
Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

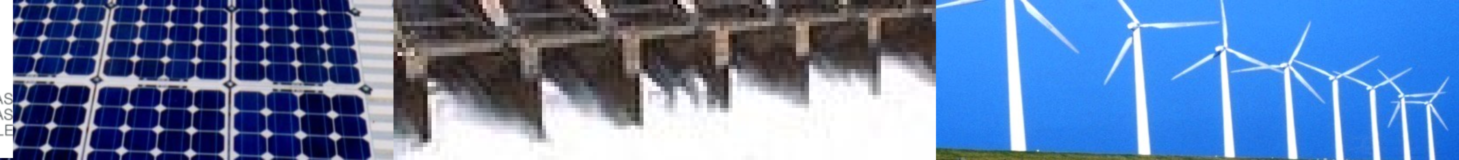
II. Dentro de la esfera

$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

Casquete con densidad de carga σ

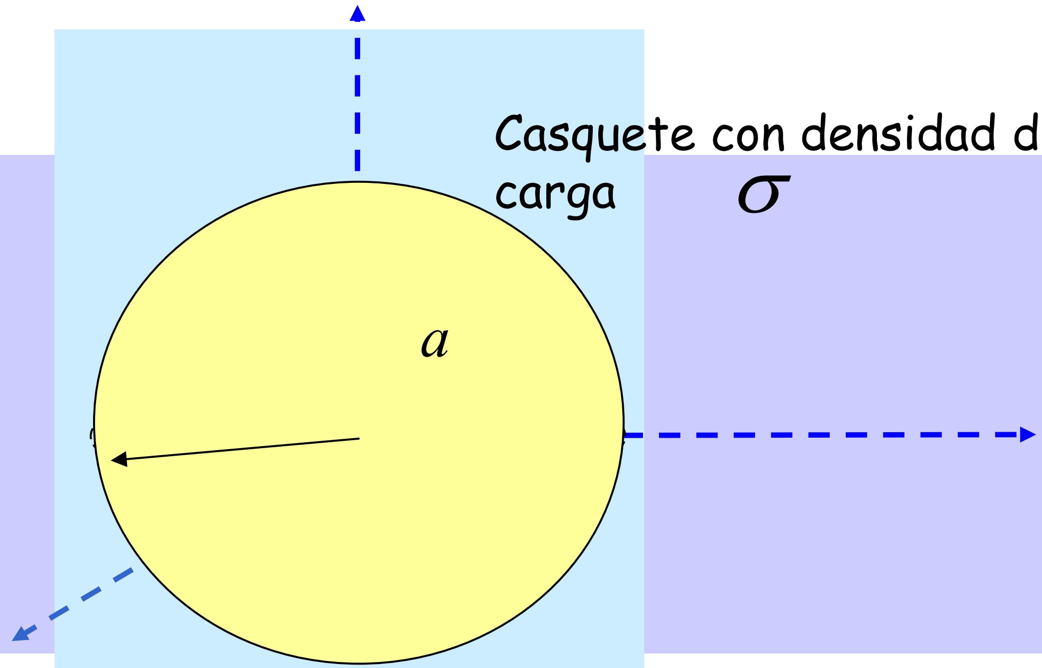


- Al interior el campo es nulo, por lo tanto el potencial es constante e igual al valor de referencia $V(\vec{r}) = V_{ref}$
- En particular, este potencial es constante en la esfera de radio a



Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

II. Dentro de la esfera



Casquete con densidad de carga σ

Por otra parte, del análisis fuera de la esfera tenemos que

$$V(\vec{r}=a)=\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 a}=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

Luego en el interior se tiene $\Rightarrow$ $V(\|\vec{r}\|\leq a)=\dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0}$ y $\vec{E}(\vec{r})=0\hat{r}$

Notar que se escoge una y sólo una referencia para el potencial en todo el espacio. Debido a que físicamente los campos eléctricos son finitos, el potencial debe ser continuo