



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 2

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



Temas

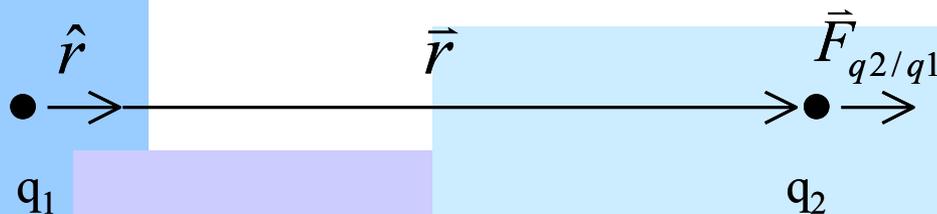
- Repaso Campo Eléctrico
- Distribuciones continuas de carga
- Ley de Gauss
- 1ª Ecuación de Maxwell



Wassily Kandinsky, "Calle de Murnau con Mujeres", 1908



Campo Eléctrico



Fuerza que siente q_2 debido a q_1

$$\vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \cdot \frac{q_1 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^2} = q_2 \cdot \frac{q_1 (\vec{r} / |\vec{r}|)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^2} = q_2 \cdot \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

Campo Eléctrico de q_1

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \vec{E}$$



Campo Eléctrico

Podemos saber si hay un campo eléctrico poniendo una carga de prueba.

- Si la carga no se mueve no hay Campo

$$\vec{E} = 0$$

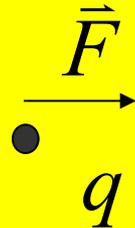




Campo Eléctrico

Podemos saber si hay un campo eléctrico poniendo una carga de prueba.

- Si la carga se mueve, entonces hay un campo y lo podemos medir como:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$


The diagram shows a small black dot representing a point charge labeled 'q'. An arrow labeled 'F' points horizontally to the right from the charge, indicating the direction of the force.



Campo Eléctrico de una Carga

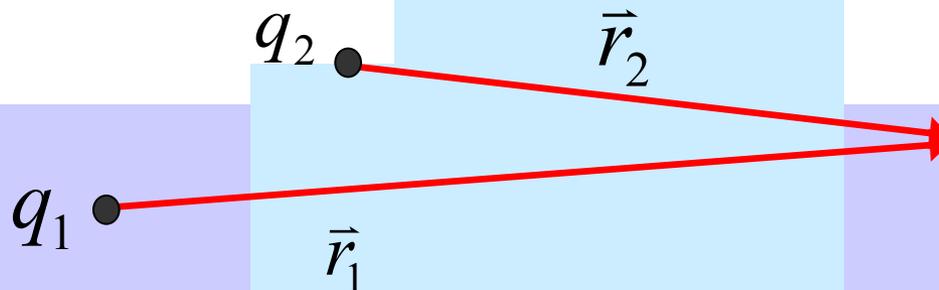
q_1

\vec{r}_1

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}_1}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_1\|^3}$$



Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}_1}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_1\|^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_2\|^3}$$

Campo eléctrico cumple con principio de superposición



Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}_1}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_1\|^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_2\|^3}$$

Campo eléctrico cumple con principio de superposición



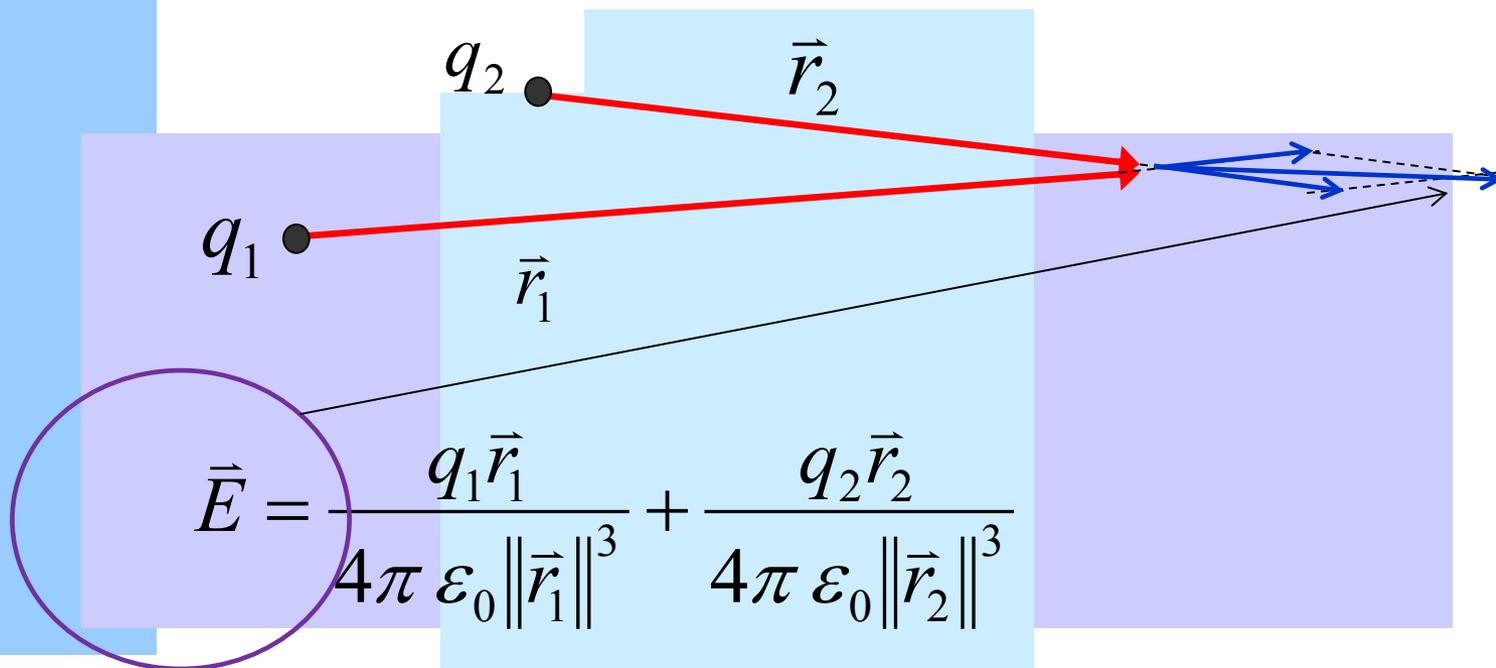
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}_1}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_1\|^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}_2\|^3}$$

Campo eléctrico cumple con principio de superposición



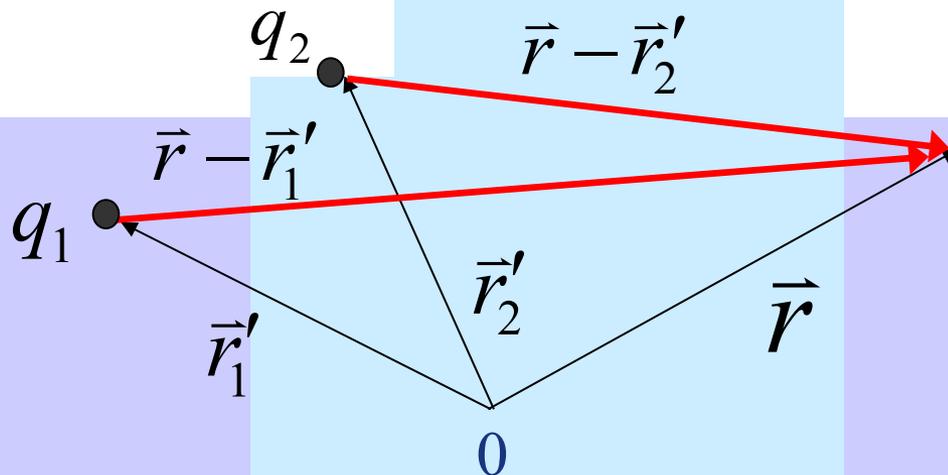
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



Campo eléctrico cumple con principio de superposición



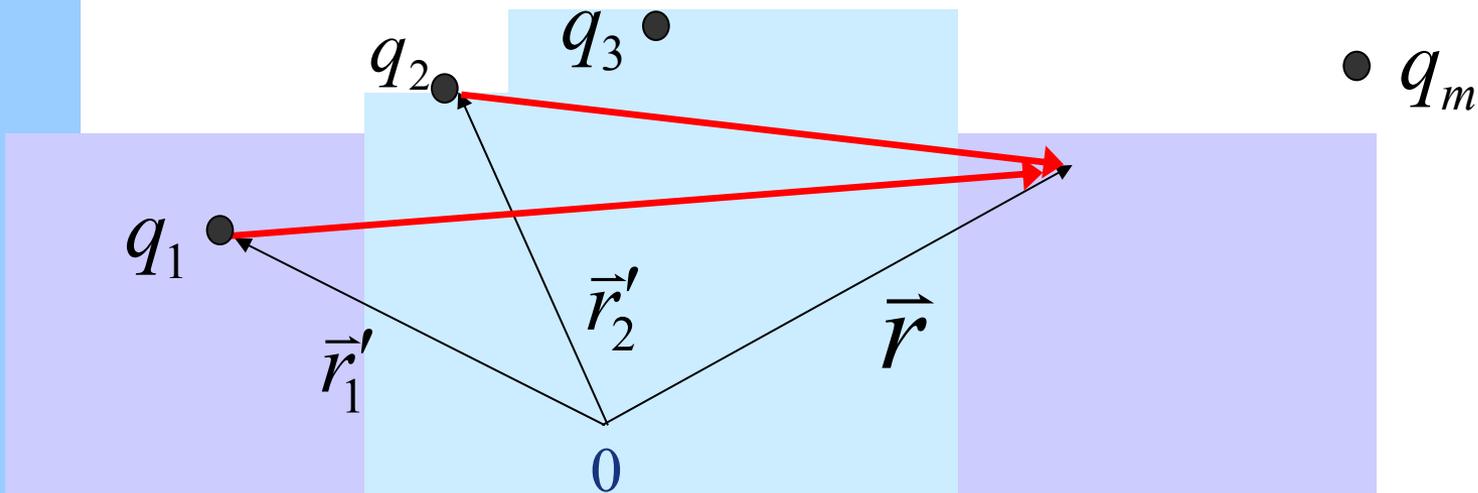
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \frac{q_1(\vec{r} - \vec{r}'_1)}{4\pi \varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'_1\|^3} + \frac{q_2(\vec{r} - \vec{r}'_2)}{4\pi \varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'_2\|^3} \Rightarrow \vec{E} = \sum_{k=1}^2 \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}'_k)}{4\pi \varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'_k\|^3}$$



Distribuciones Continuas de Carga



$$\vec{E} = \sum_{k=1}^m \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}'_k)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'_k\|^3}$$

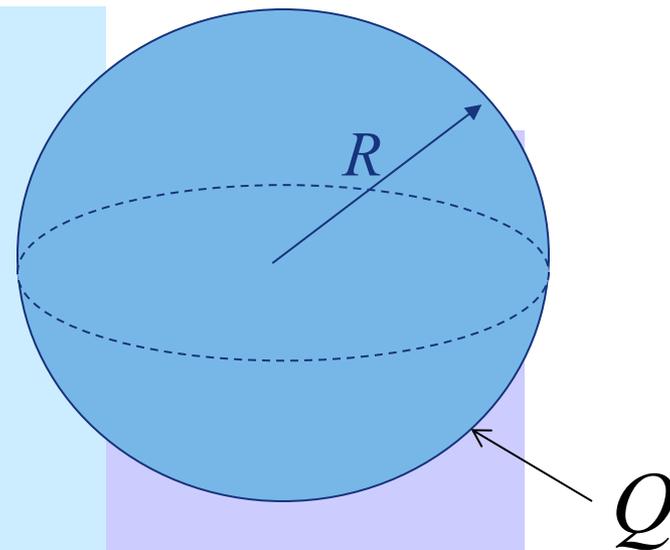
Campo eléctrico de un sistema de m cargas



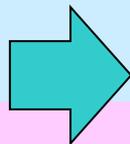
Distribuciones Continuas de Carga

Consideremos una carga total Q distribuida en forma uniforme en la esfera sólida de radio R

Podemos definir una densidad de carga por unidad de volumen ρ



$$\rho = \frac{\text{Carga}}{\text{Volumen}} [C/m^3]$$



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} [C/m^3]$$



Distribuciones Continuas de Carga

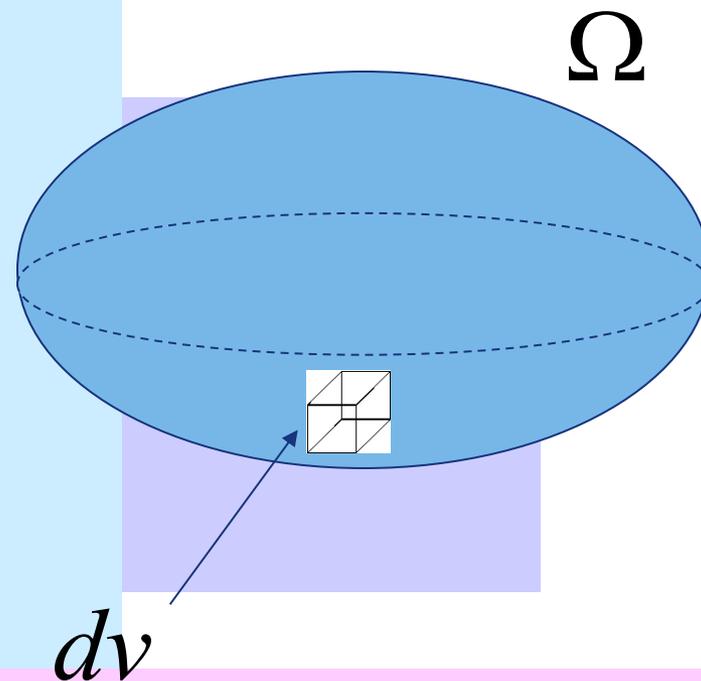
En general se define la densidad de carga por unidad de volumen $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad [C / m^3]$$

Luego si conocemos la densidad de carga $\rho(\vec{r})$, la carga contenida en un elemento infinitesimal de volumen es

$$dq = \rho(\vec{r}) dv \quad [C]$$

Notar que $\rho(\vec{r})$ es un **campo escalar**





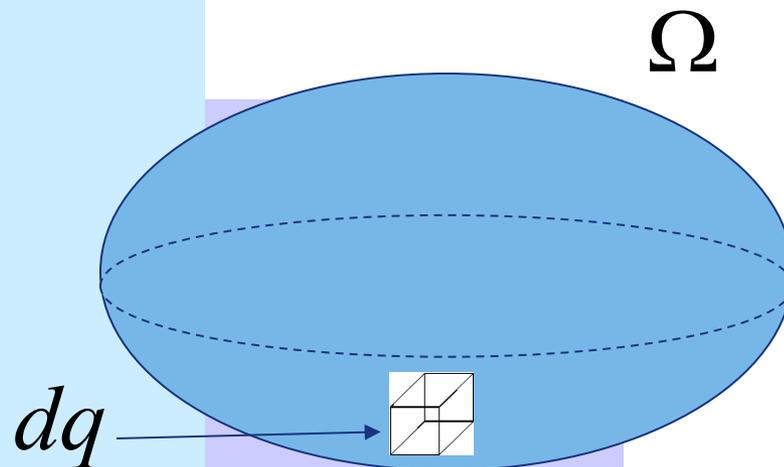
Distribuciones Continuas de Carga

Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^m \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3}$$

Para distribuciones continuas de carga

$$\Sigma \rightarrow \int \quad y \quad q \rightarrow dq$$



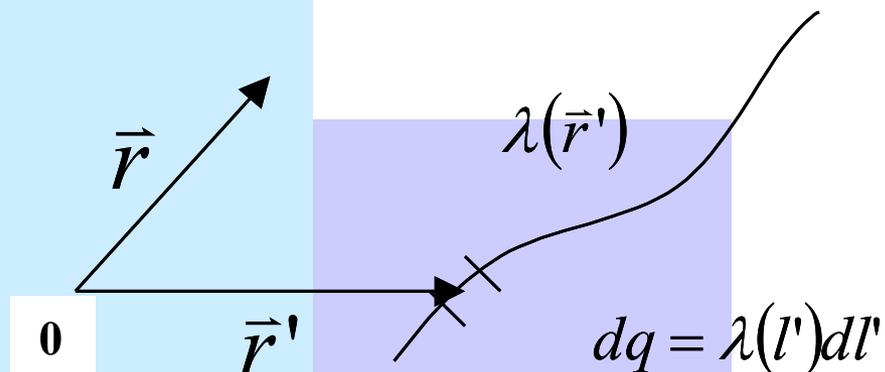
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') dv$$



Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones lineales de carga usamos densidades lineales

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} [C / m]$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq' \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \lambda(\vec{r}') dl'$$

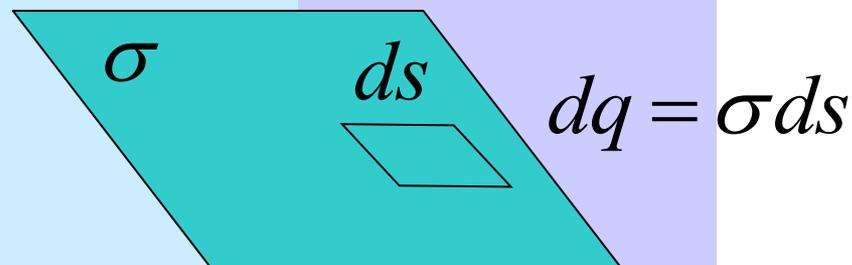


Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones superficiales de carga usamos

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} [C / m^2]$$

Densidad superficial de carga

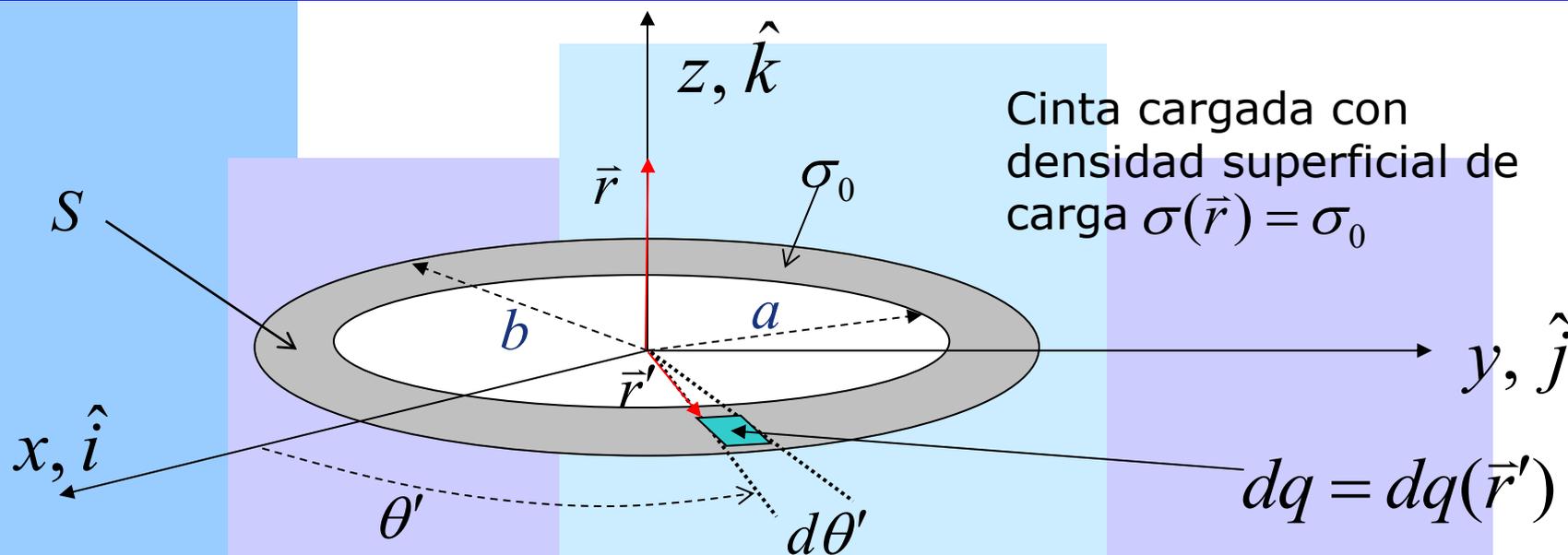


Plano con carga superficial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq' \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \sigma(\vec{r}') ds'$$



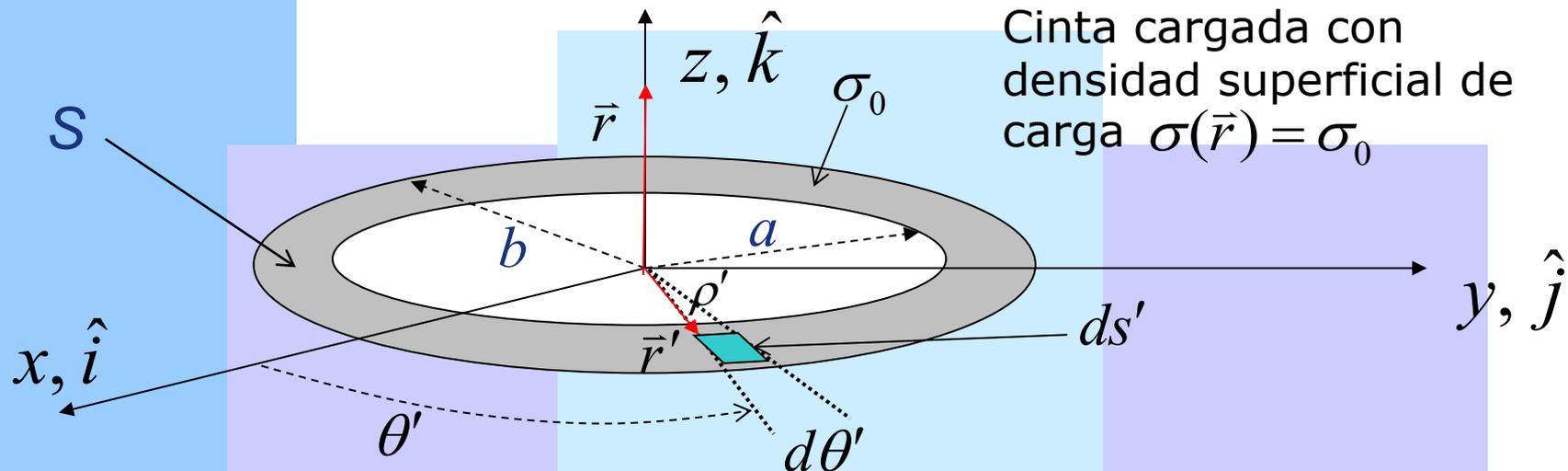
Ejemplo: Campo de cinta cargada en eje Z



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Ejemplo



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

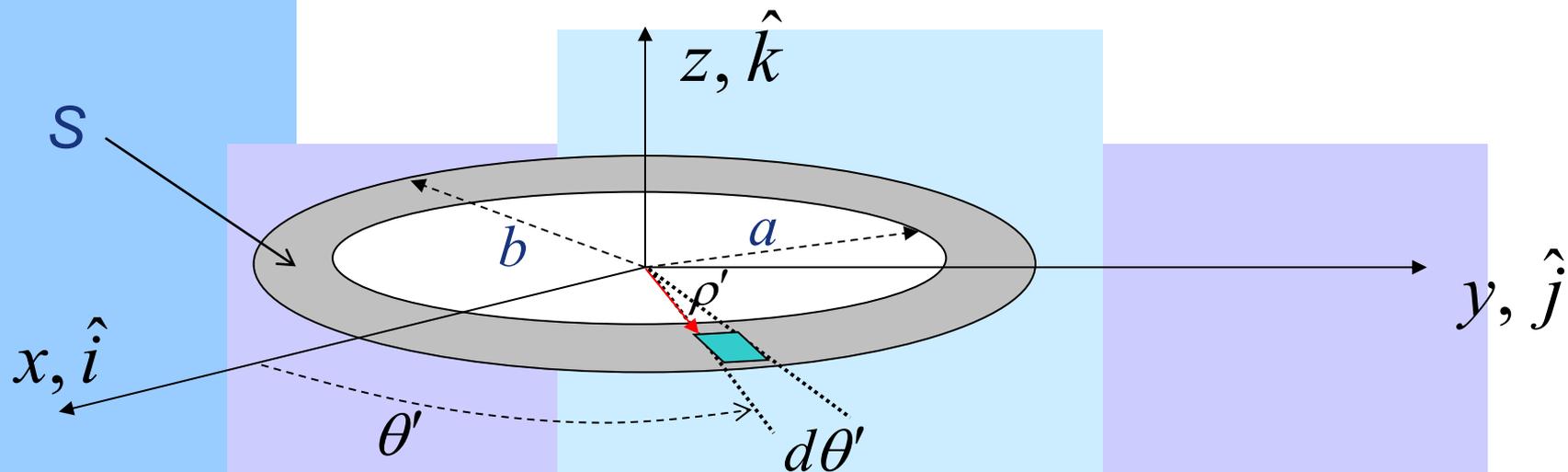
$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}' = \rho' \cos \theta' \hat{i} + \rho' \sin \theta' \hat{j}$$

$$dq = \sigma(\vec{r}') ds' = \sigma_0 \rho' d\theta' d\rho'$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_0 \rho' d\theta' d\rho' (-\rho' \cos \theta' \hat{i} - \rho' \sin \theta' \hat{j} + z\hat{k})}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$



Ejemplo



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

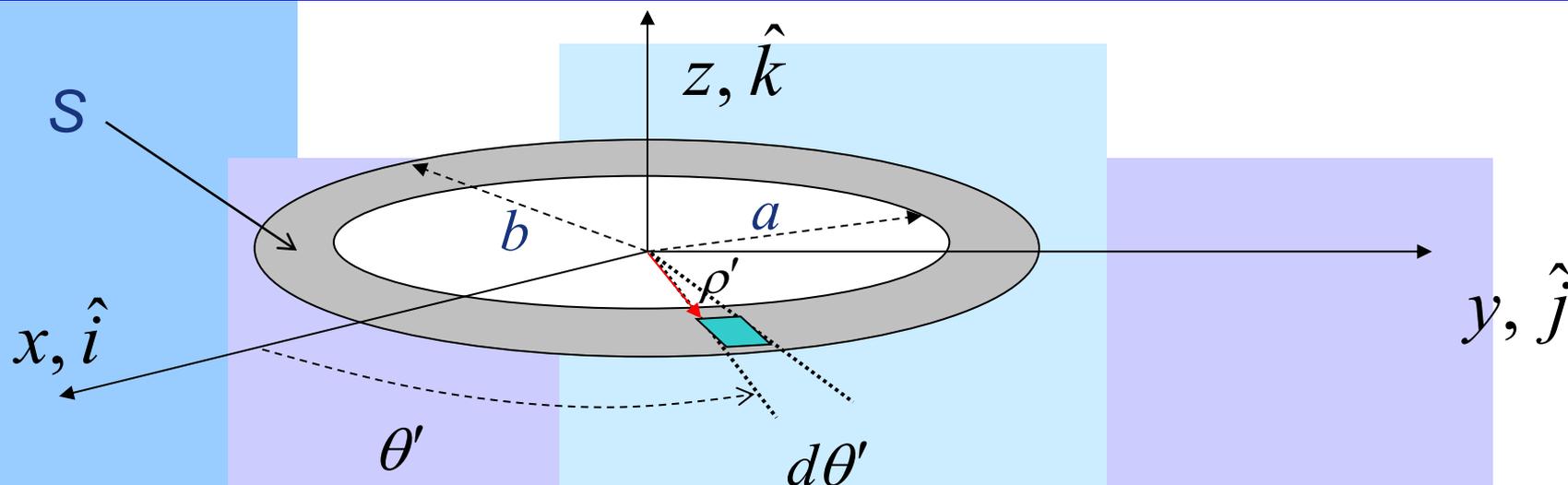
$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}' = \rho' \cos\theta' \hat{i} + \rho' \sin\theta' \hat{j}$$

$$dq = \sigma(\vec{r}') ds' = \sigma_0 \rho' d\theta' d\rho'$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_0 \rho' d\theta' d\rho' (-\rho' \cos\theta' \hat{i} - \rho' \sin\theta' \hat{j} + z\hat{k})}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$



Ejemplo

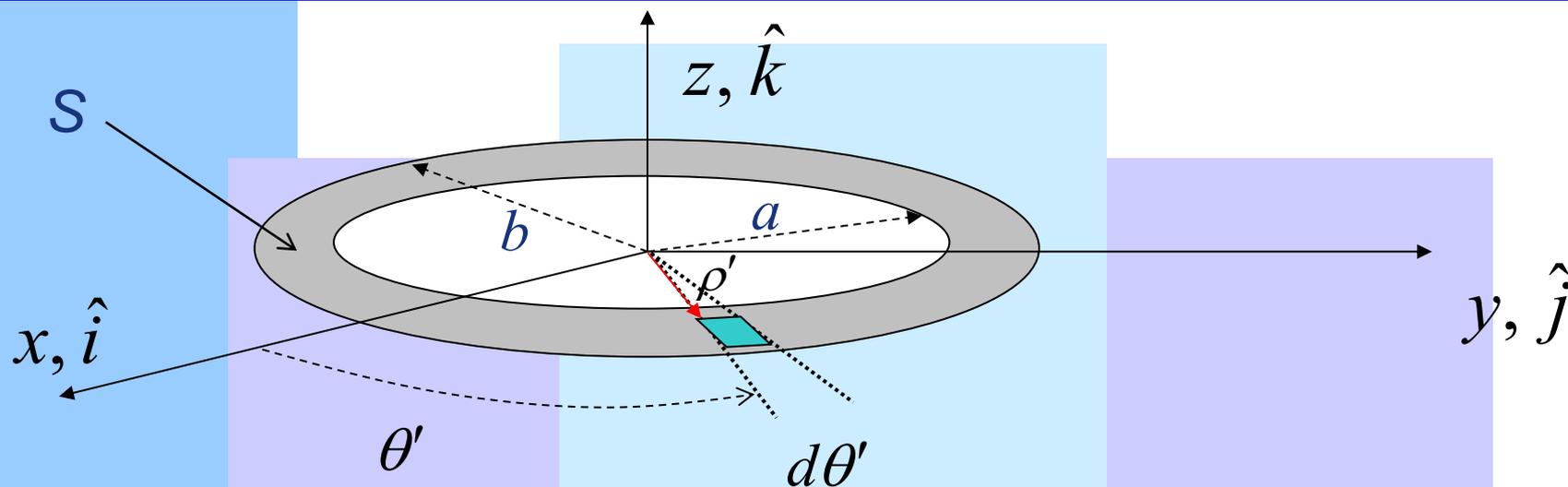


$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_0 \rho' z d\theta' d\rho' \hat{k}}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 z 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho'=a}^{\rho'=b} \frac{\rho' d\rho' \hat{k}}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E(z) = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{\rho'=a}^{\rho'=b} \hat{k} = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{k}$$



Ejemplo

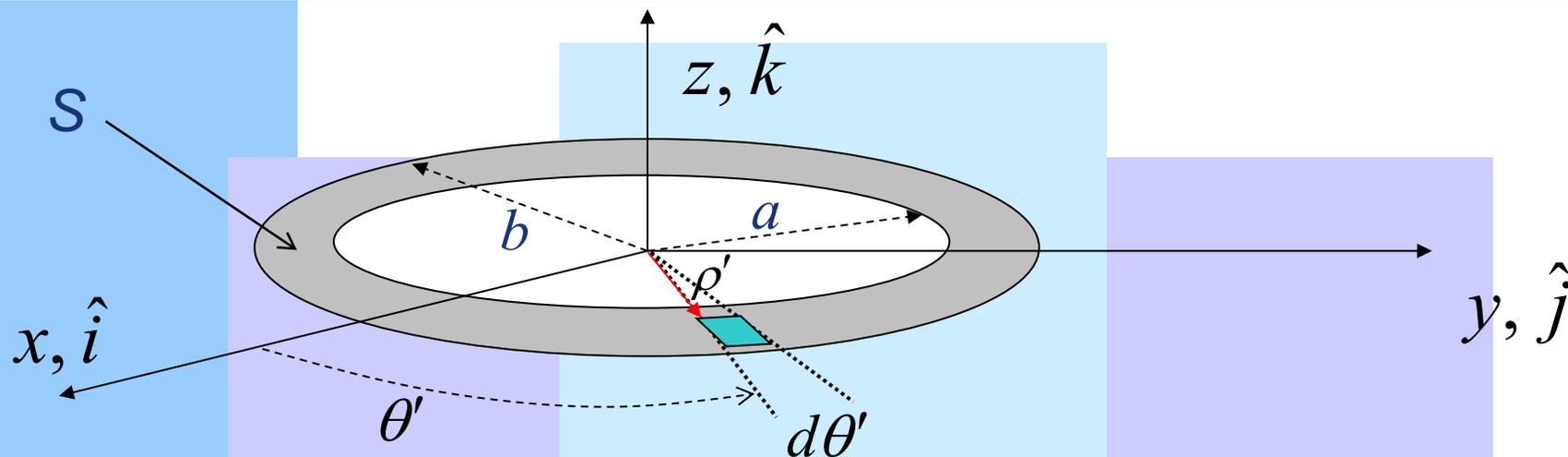


$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{k}$$

Notar que el campo de un disco es (a=0) $E(z) = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(b^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{k}$



Ejemplo



$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{k}$$

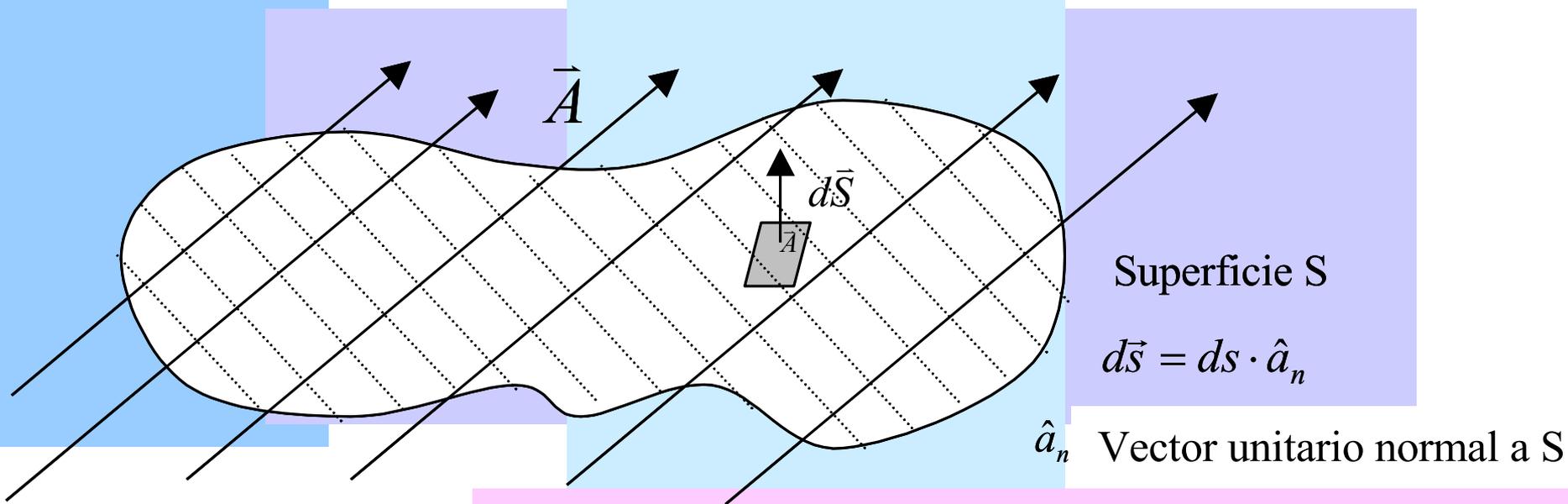
Notar que el campo de un plano infinito es ($a=0$ y $b \rightarrow \infty$)

$$E(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\|z\|} \right) \hat{k} = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$



LEY DE GAUSS: Conceptos previos

Flujo \vec{A} campo vectorial definido en todo el espacio y una superficie S



$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

flujo ψ de a través de la superficie S

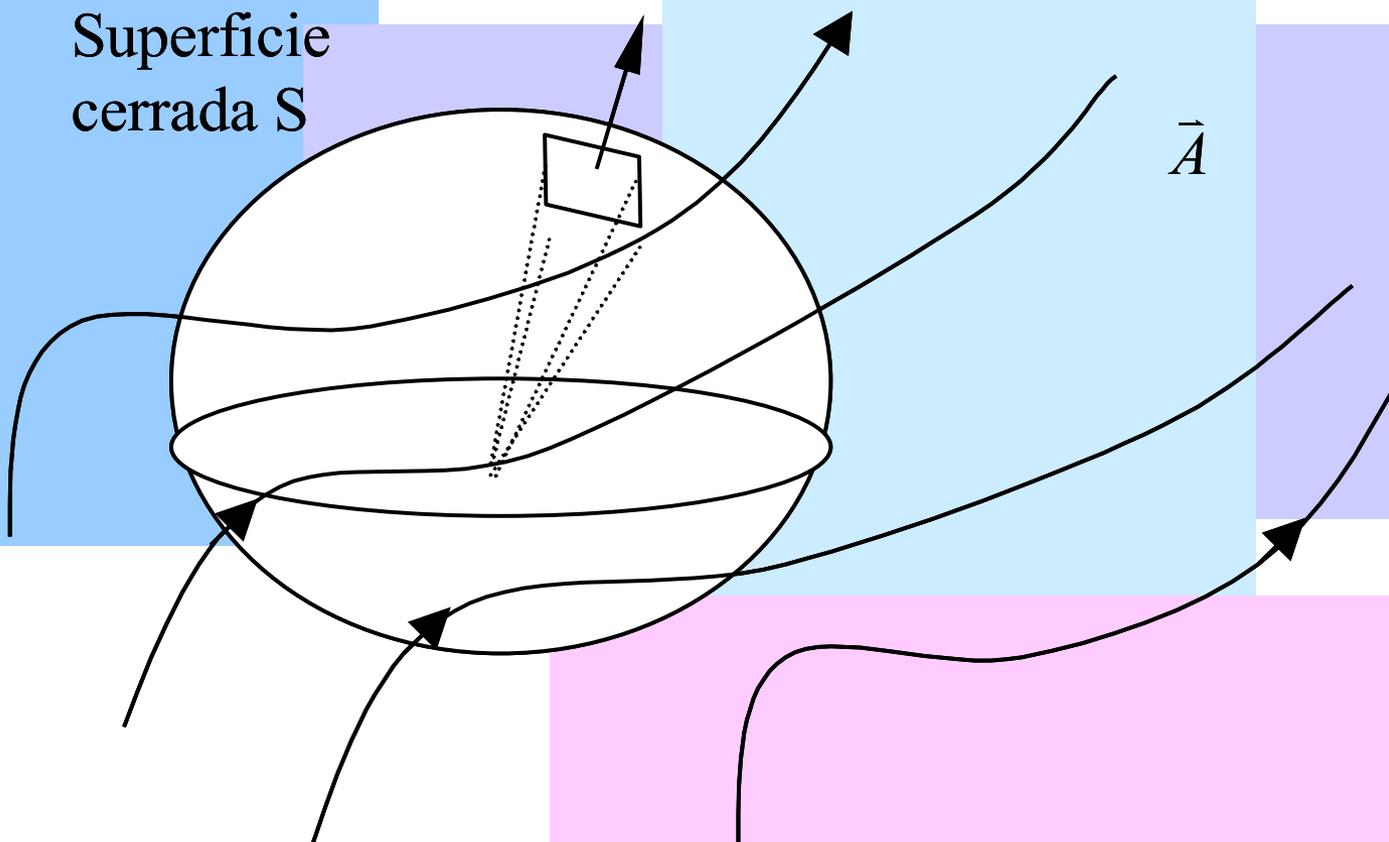


LEY DE GAUSS: Conceptos previos

Superficie
cerrada S

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{a}_n$$

$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

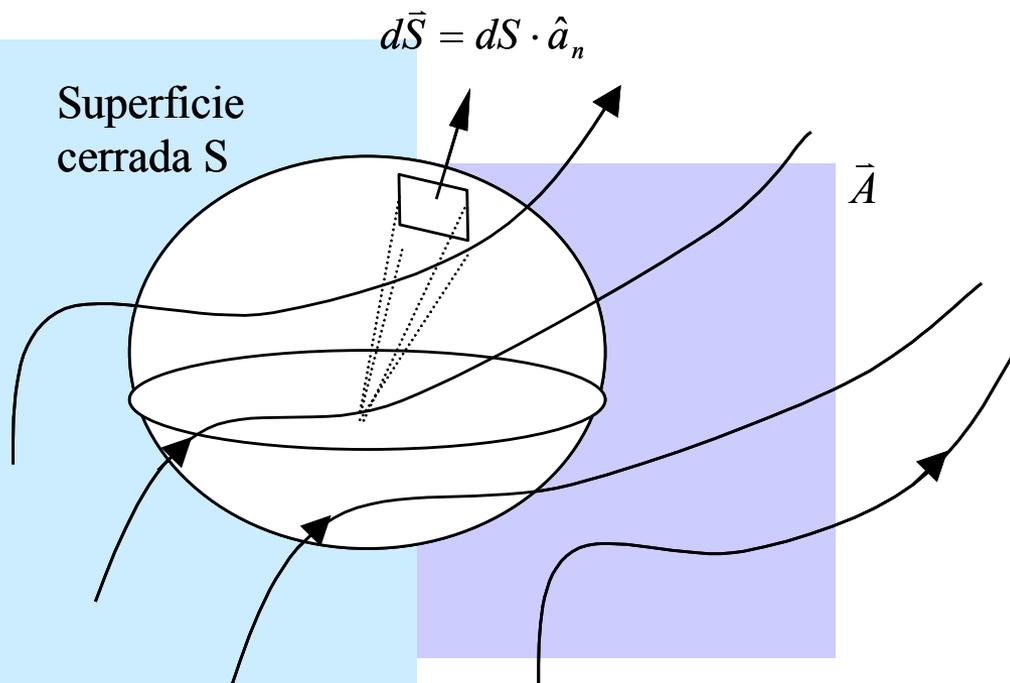




Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(s)} \nabla \cdot \vec{A} dv$$

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z}$$



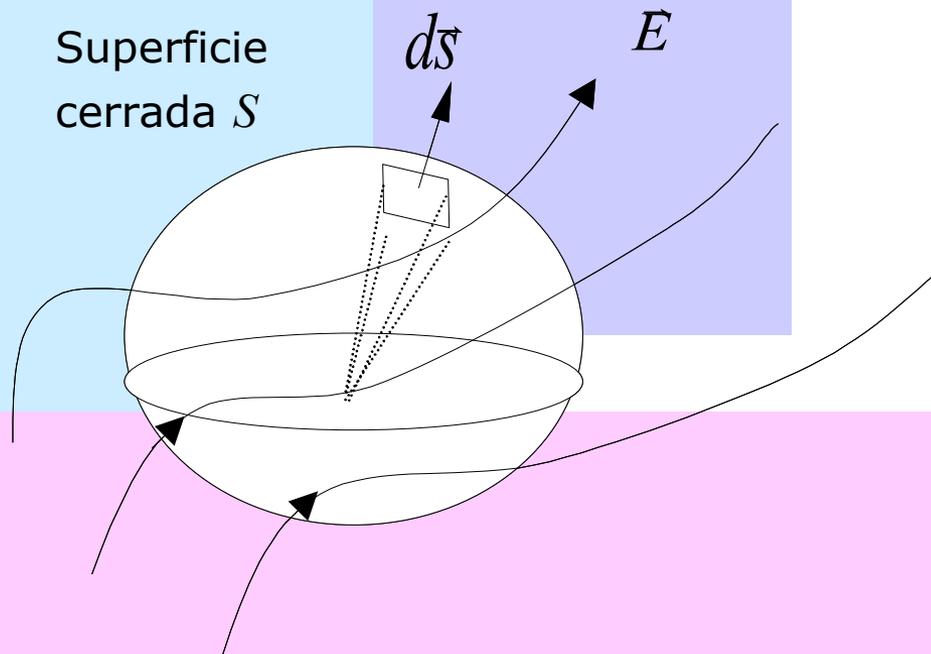


Ley de Gauss

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ϵ_0

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Superficie
cerrada S





Ejemplo

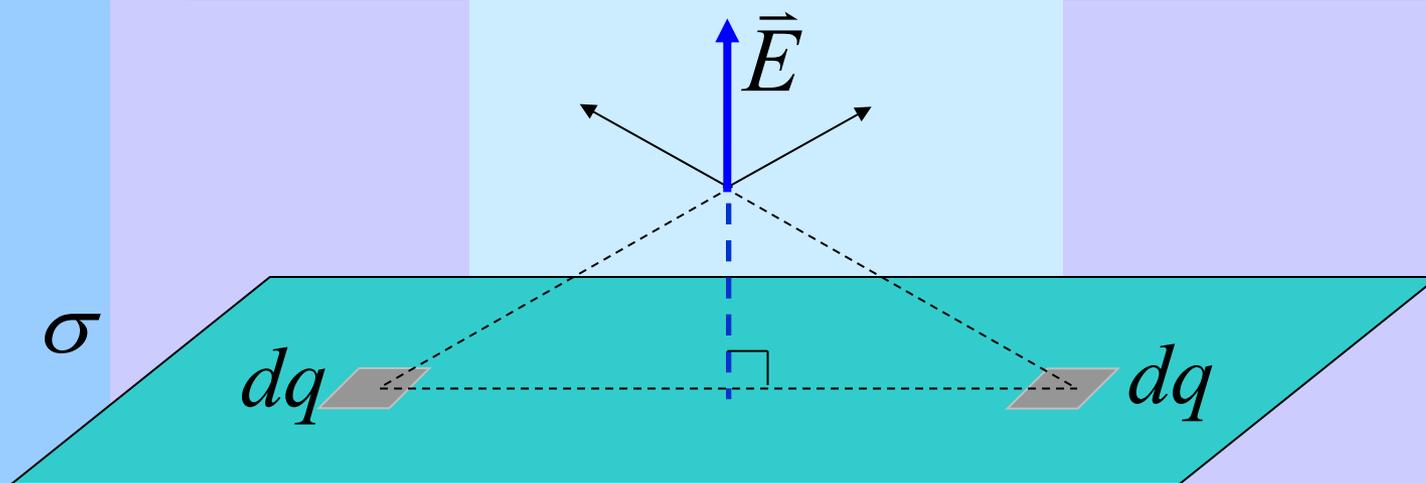
Calcular el campo que produce un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme σ





Ejemplo

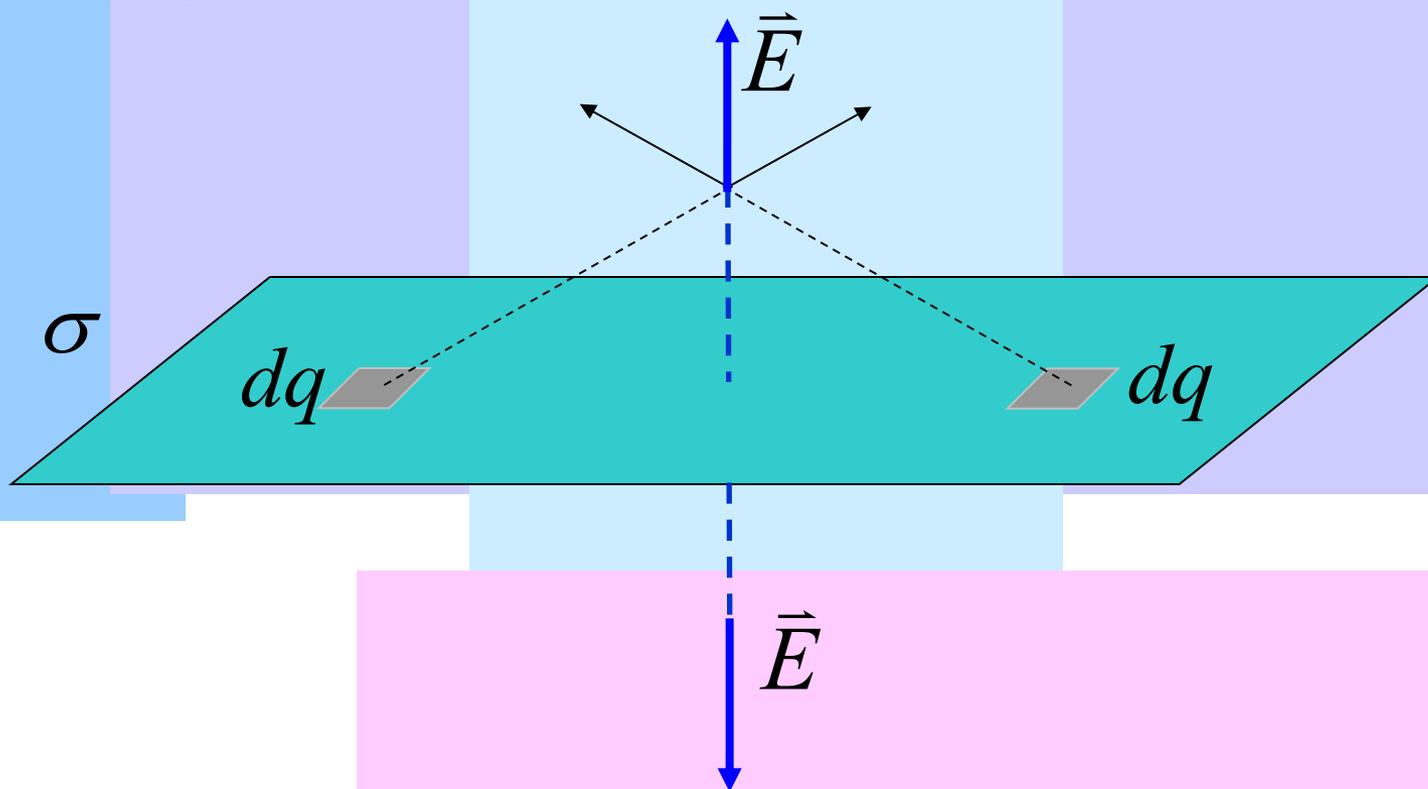
Por simetría el campo es perpendicular a la superficie





Ejemplo

El campo es perpendicular a la superficie



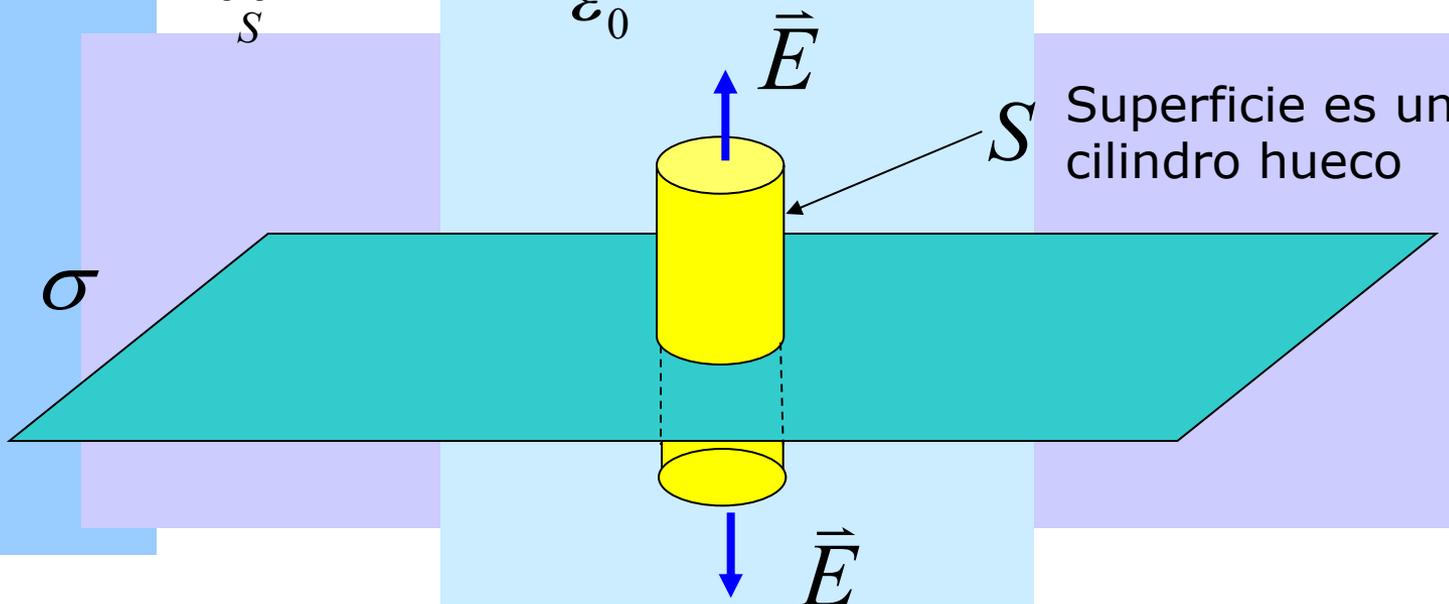
El campo es simétrico con respecto al plano



Ejemplo

Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Manto}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



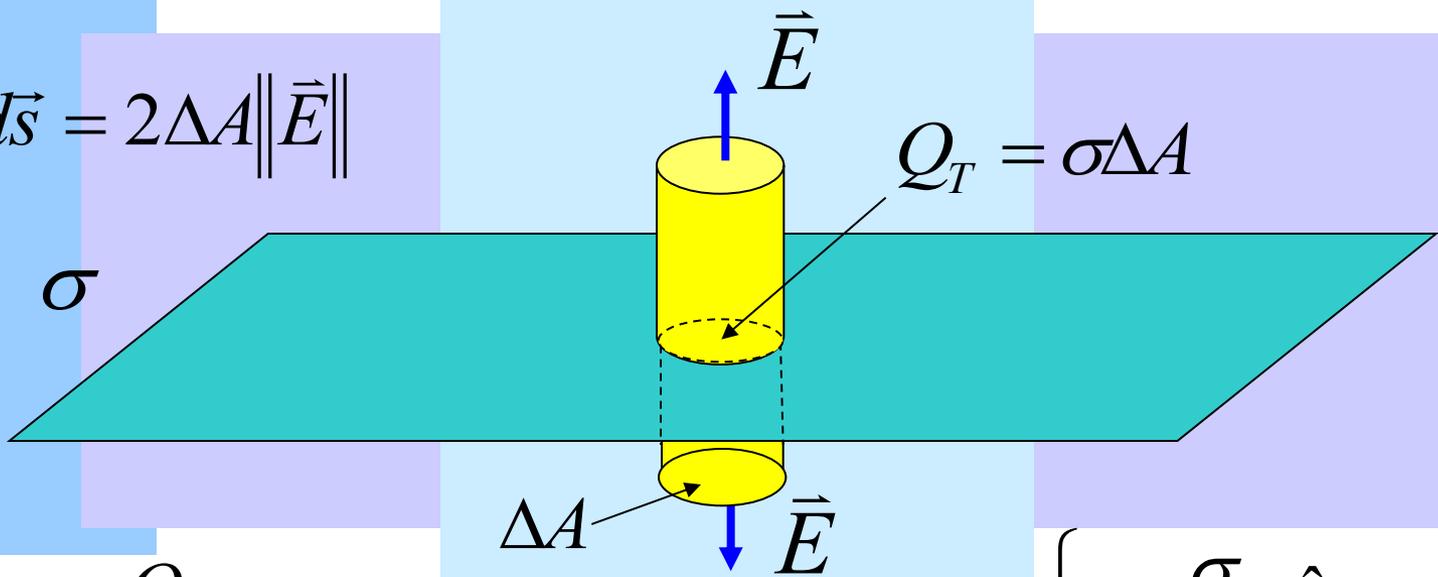
Ejemplo

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Manto

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A \|\vec{E}\|$$

tapas



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

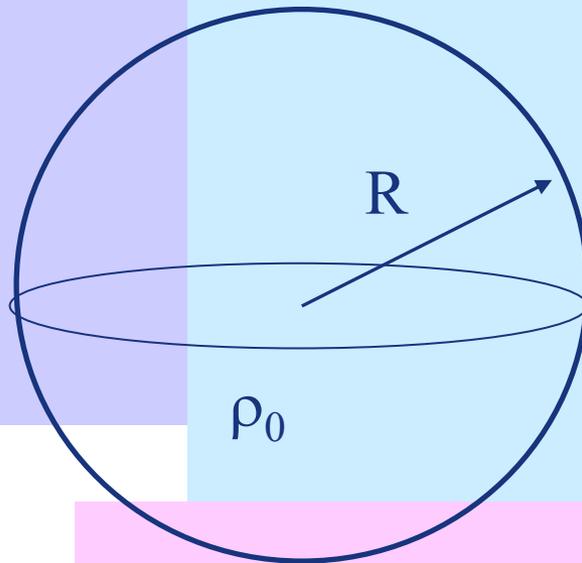
$$2\Delta A \|\vec{E}\| = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z < 0 \end{cases}$$



Ejemplo

Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R .



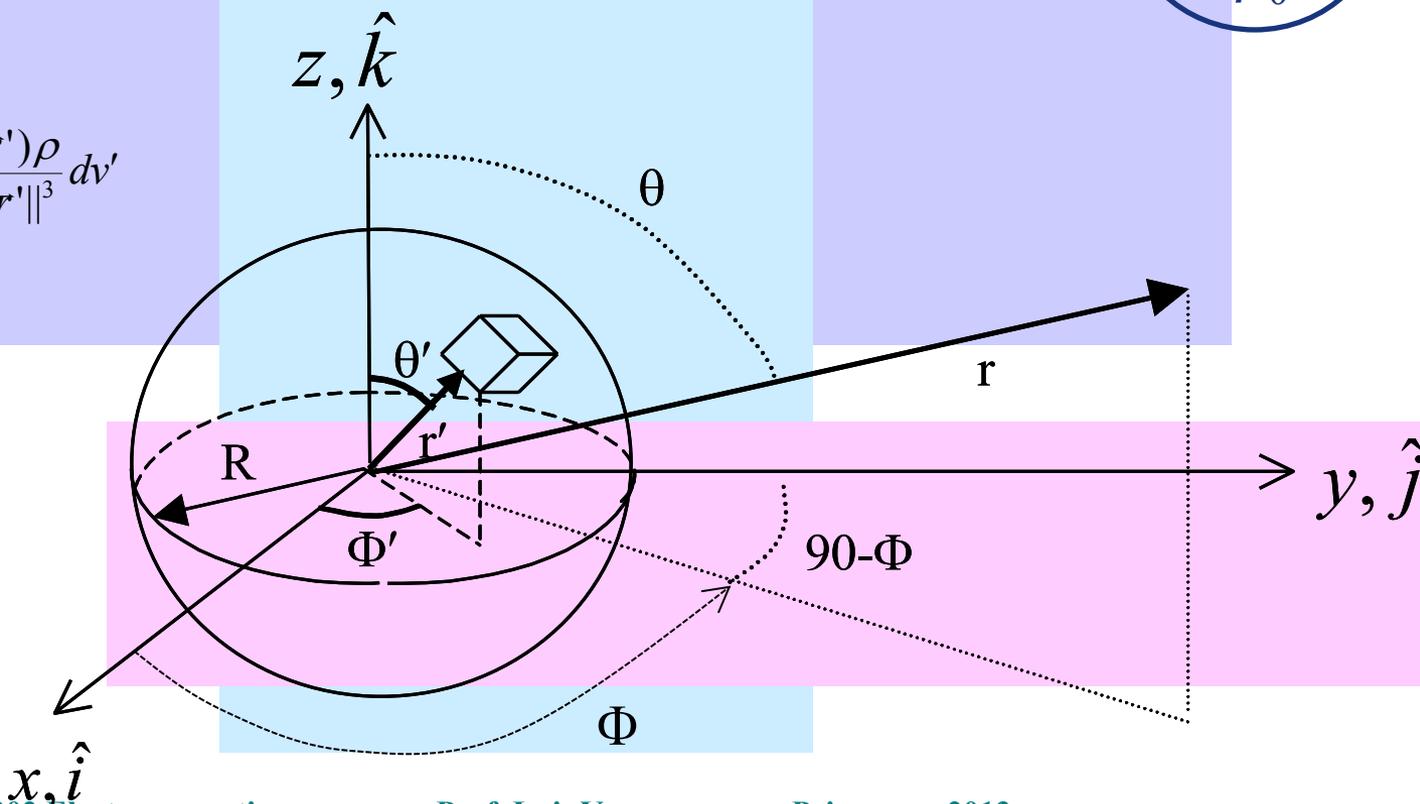
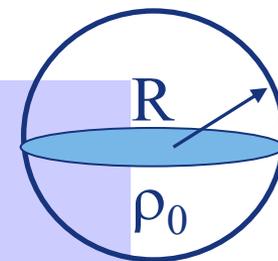


Ejemplo

Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R .

Solⁿ 1. Método Integración Directa

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv'$$





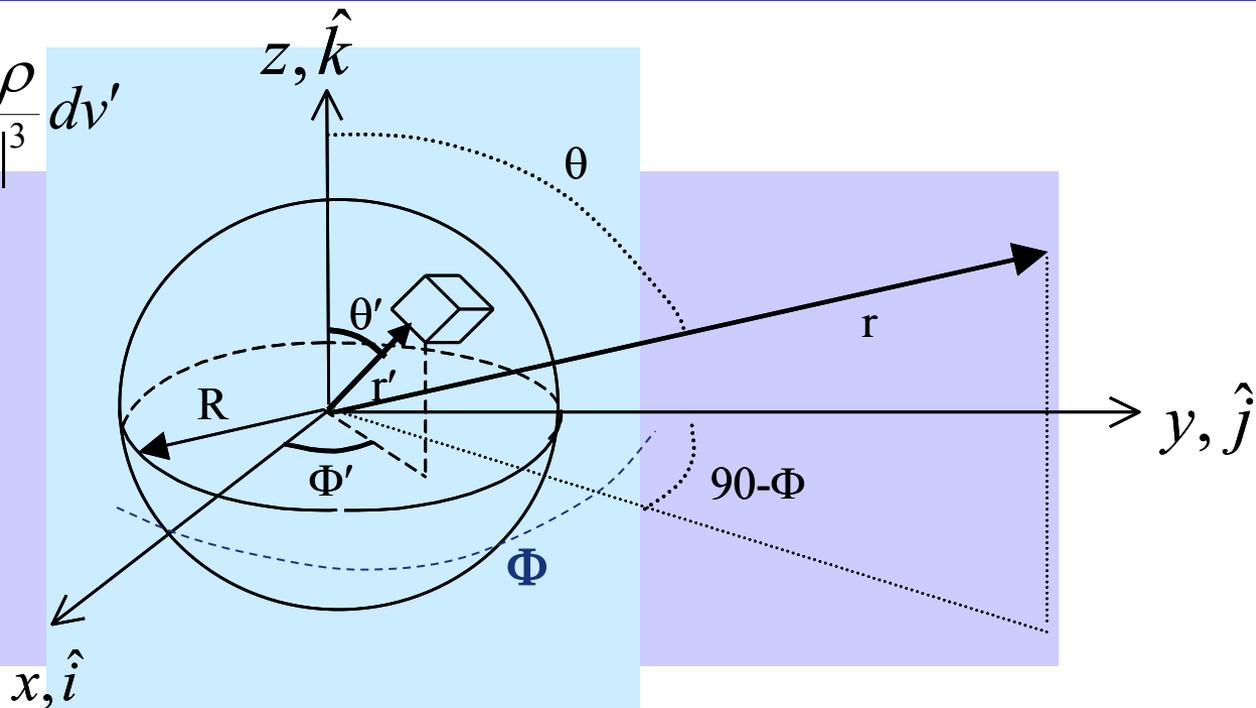
Ejemplo

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\rho}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

(r)(φ)

$$dv' = r' d\theta' r' \sin \theta' d\phi' dr'$$

$$dv' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'$$



$$\vec{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k}$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

..... UF UF!!



Ejemplo

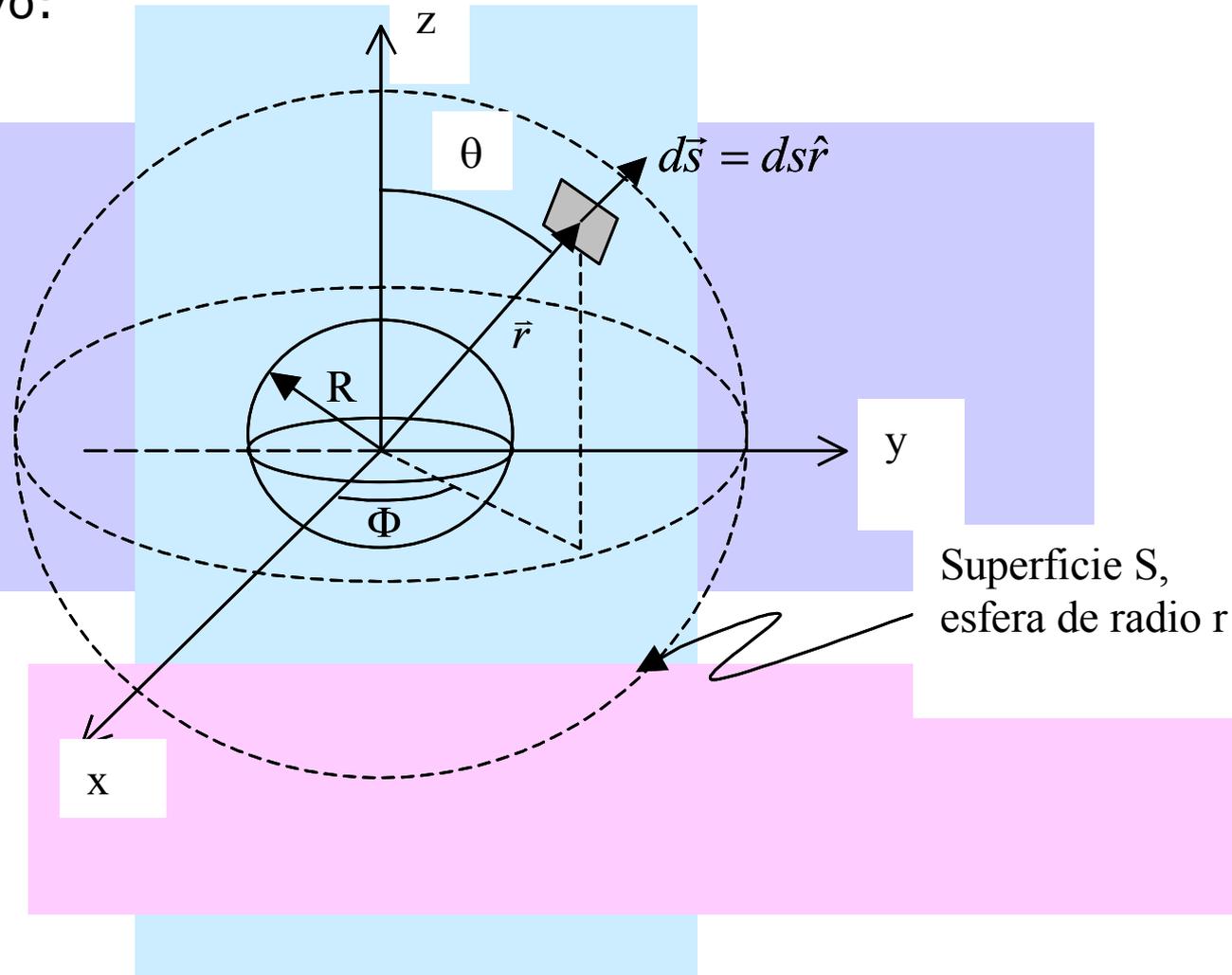
2. Método alternativo:

Ley de Gauss

Para $r > R$

Visualizamos que el campo es radial

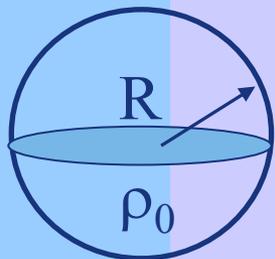
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$





Ejemplo

Calculemos la carga total encerrada en S



$$Q = \iiint \rho_0 dv \Rightarrow$$

$$Q = \int_{(r)(\phi)(\theta)}^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_0 r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_0 r^2 \underbrace{(-\cos \theta)^\pi}_{1 - (-1) = 2} d\phi dr$$

$$Q = \int_0^R \rho_0 r^2 2 \cdot 2\pi dr$$

$$Q = \rho_0 \frac{R^3}{3} 4\pi$$



Ejemplo

Por simetría $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$

$$d\vec{S} = r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(\vec{r})\hat{r} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\dots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$\dots = E(\vec{r}) 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} = 4\pi r^2 E(\vec{r})$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2} \rho \hat{r}$$

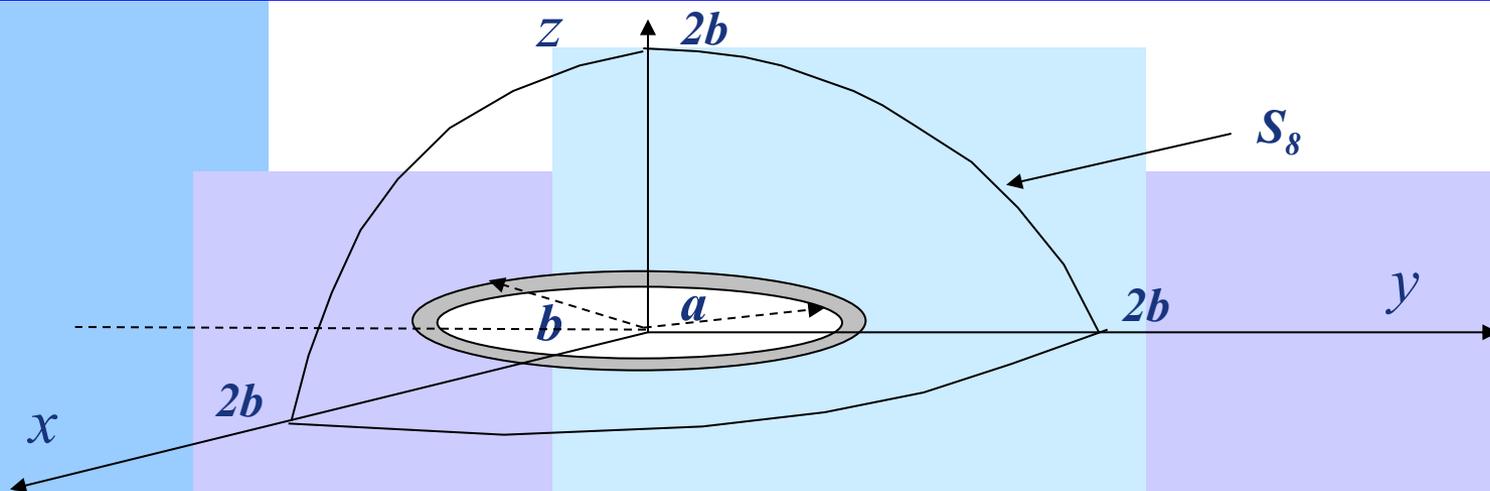


Comentarios sobre la Ley de Gauss

- i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,
- ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,
- iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).



Comentarios sobre la Ley de Gauss

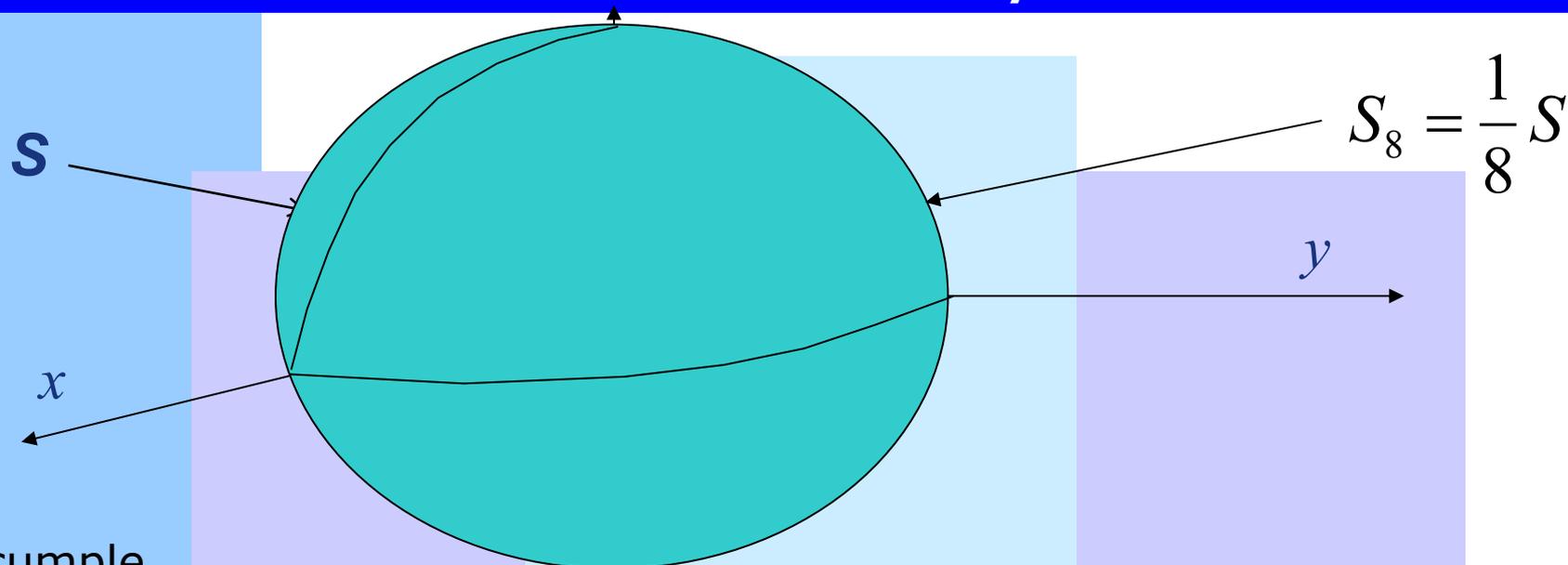


Calcular el flujo de campo eléctrico en la superficie S_g definida por el segmento de casquete esférico ubicado en el cuadrante $(x>0, y>0, z>0)$ y que intersecta en $x=y=z=2b$.

$$\iint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{s} = ?$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss



Se cumple

$$\left. \begin{aligned} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 8 \iint_{S_8} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \gamma \quad \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \text{Además } Q &= \iint_{\Lambda} \sigma ds = \pi(b^2 - a^2)\sigma_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \iint_{S_8} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\pi(b^2 - a^2)\sigma_0}{8\epsilon_0}$$



1ª Ecuación de Maxwell

Dado que $Q_T = \iiint_V \rho dv$ podemos escribir $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$

Por el teorema de la divergencia se cumple $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dv$

Luego la Ley de Gauss se puede escribir como $\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$

Como esto se cumple $\forall V$, entonces: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$



1ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho$$

Definimos Vector Desplazamiento
(ya veremos el real sentido de este vector
cuando analicemos campos en la materia)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Esta es la 1ª Ecuación de Maxwell.