FI2001 Mecánica
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Tiempo: 3 Horas
27 de noviembre de 2012
Profesora: Patricia Sotomayor C.

EXAMEN

PROBLEMA 1

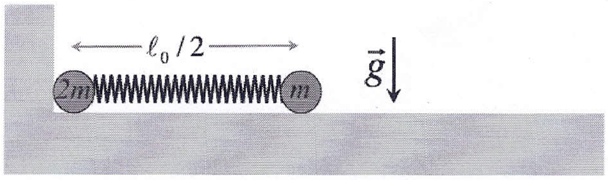
Una partícula de masa m y otra de masa $2m$ se encuentran unidas por un resorte ideal, de constante k y largo natural ℓ_0 como muestra la figura. Inicialmente la partícula de masa $2m$ se encuentra apoyada contra la pared vertical, y la partícula de masa m comprime al resorte una distancia $\ell_0/2$. La superficie sobre la cual se encuentran las partículas se extiende infinitamente hacia la derecha, es horizontal y completamente lisa.

Si el sistema es liberado desde su condición inicial en reposo, se pide:

a) Velocidad del centro de masa de ambas partículas, una vez que el sistema se separa de la pared.

b) Largos máximo y mínimo que alcanza el resorte una vez que el sistema se separa de la pared.

c) Frecuencia de las oscilaciones del sistema una vez que éste se separa de la pared

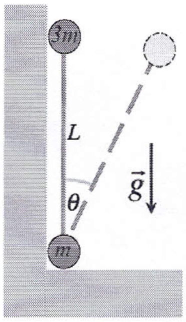


PROBLEMA 2

Una barra ideal de largo L tiene en su extremo inferior una partícula de masa m y en su extremo superior una partícula de masa $3m$. Inicialmente la barra está en posición vertical y la partícula superior recibe una pequeña perturbación que hace que la barra caiga como indica la figura. No existe ningún tipo de roce.

a) Determine una expresión para $\dot{\theta}$ en función de θ.

b) Indique si, al caer la barra, la partícula inferior se despega primero de la pared horizontal o de la pared vertical. Justifique su respuesta.

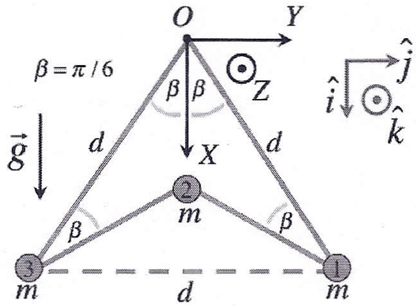


PROBLEMA 3

Una estructura está compuesta por cuatro barras ideales que tienen pegadas tres partículas de masa m, dispuestas en el plano de las barras, con la geometría de la figura. El vértice superior está fijo en O , y puede rotar en torno a los tres ejes de la figura.

Se pide:

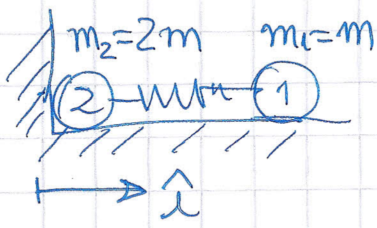
a) La matriz de inercia de la estructura con respecto a O para el sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) de la figura. Indique si (X, Y, Z) son ejes principales, justificando su respuesta.



b) El momento angular de la estructura con respecto a O cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$, de la estructura, toma los siguientes valores: $\vec{\omega} = \omega_x \hat{\imath}$ (en torno a X); $\vec{\omega} = \omega_y \hat{\jmath}$ (en torno a Y); $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$ (en torno a Z), y las frecuencias de pequeñas oscilaciones para el movimiento en torno a Z y el movimiento en torno a Y.

c) La máxima rapidez que alcanza el centro de masa de la estructura, cuando ésta se suelta desde el reposo con su lado $\overline{O1}$ coincidente con el eje Y.

(1)



La partícula (2) se despega cuando el resorte alcanza su largo natural.

Además, las fuerzas que trabajan son conservativas $\Rightarrow$ la energía se conserva.

Por lo tanto: $EMT = cte = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{2} - l_0\right)^2$ (antes de soltar la part. (1))

$$E = \frac{k\,l_0^2}{8}$$ (*) Energía q' se mantendrá cte en todo el movimiento

Esta energía, cuando la masa m_2 se suelta de la pared, se escribe como:

$$E = \frac{1}{2}m_2 \cancel{v_2^2} + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$\cancel{v_2^2} \to 0$ (instante del despegue)

(La energía potencial es nula porque el resorte está en su largo natural)

Entonces la velocidad de la masa m_1 al momento del despegue de m_2 es:

$$v_1^2 = \frac{2}{m}\cdot\frac{k l_0^2}{8} = \frac{k\,l_0^2}{4m} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{l_0}{2}$$

La velocidad del centro de masa es:

$$\vec{v}_G = \frac{m\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{l_0}{2} + 2m\cdot 0}{3m}\,\hat{\imath} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{l_0}{6}\,\hat{\imath} = \vec{cte}$$

$\vec{v}_G = \vec{cte}$ ya que no actuan fzas externas al sistema en la dirección $\hat{\imath}$.

b) Durante el movimiento posterior al despegue, la expresión de la energía mecánica es:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{K_G} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1/G}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2/G}^2}_{K_{rel}} + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

En el momento de estiramiento máximo

$v_{1/G} = v_{2/G} = 0$: Las velocidades de m_1 y m_2 relativas a G son nulas, dado que se está en estiramiento máximo o mínimo

Sea l_M el estiramiento máximo o mínimo

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{\frac{k l_0^2}{24}} + \frac{1}{2} k (l_M - l_0)^2$$

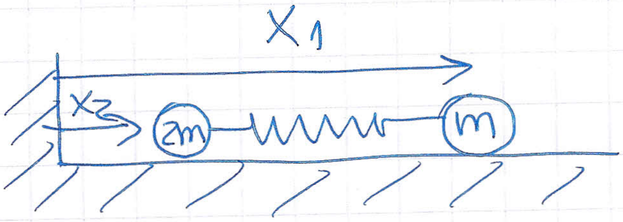
Igualando E a la expresión (*)

$$\frac{k l_0^2}{24} + \frac{1}{2} k (l_M - l_0)^2 = \frac{k l_0^2}{8} \Rightarrow (l_M - l_0)^2 = \frac{1}{6} l_0$$

De donde: $l_{máx} = l_0 + \frac{1}{6} l_0 = \frac{7}{6} l_0$

$l_{mín} = l_0 - \frac{1}{6} l_0 = \frac{5}{6} l_0$.

c)



Definiendo x_1 y x_2 como en la figura, el largo del resorte $l = x_1 - x_2$. Entonces la fuerza que actúa sobre cada partícula es:

$$m\ddot{x}_1 = -k\left((x_1-x_2)-l_0\right) \quad (1)$$

$$2m\ddot{x}_2 = +k\left((x_1-x_2)-l_0\right) \quad (2)$$

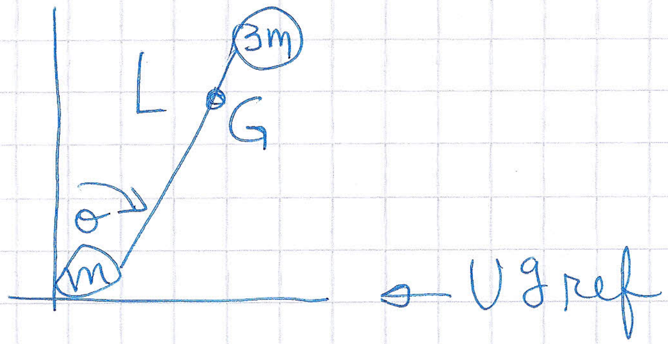
$$(1) - \tfrac{1}{2} * (2) \Rightarrow m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) = -k\left((x_1-x_2)-l_0\right) - \frac{k}{2}\left((x_1-x_2)-l_0\right)$$

$$= -\frac{3k}{2}\left((x_1-x_2)-l_0\right)$$

es decir: $$\ddot{l} = -\frac{3k}{2m}(l-l_0)$$

$\Rightarrow$ la frecuencia de oscilación es $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$

P2



a) EMT = cte

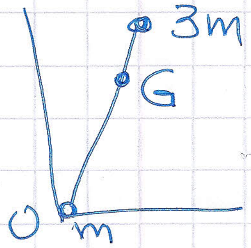
Inicialmente $K=0$; $U^g = 3mgL$

En el movimiento $K = \frac{1}{2}(3m)(L\dot{\theta})^2$; $U^g = 3mgL\cos\theta$

$$\Rightarrow 3mgL = \frac{3}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + 3mgL\cos\theta \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(1-\cos\theta)}$$

b) Necesitamos la fuerza sobre el sistema en el pto fijo

Ubicación del centro de masa



$$\vec{OG} = \frac{3m \cdot L + 0 \cdot m}{4m}\hat{r} = \frac{3}{4}L\hat{r} \Rightarrow \boxed{OG = \frac{3L}{4}}$$

Además: $\sum_i \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G$

$$\Rightarrow 4m\ddot{X}_G = N_x$$
$$4m\ddot{Y}_G = N_y - 4mg.$$

donde $X_G = OG\,\mathrm{sen}\,\theta$

$Y_G = OG\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}_G = OG\cos\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{X}_G = -OG\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + OG\cos\theta\,\ddot{\theta}$$

$$\dot{Y}_G = -OG\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{Y}_G = -OG\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - OG\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta}$$

De donde: $N_x = 4m\,OG(-\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta})$ (1)

$N_y = 4mg + 4m\,OG(-\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta})$ (2)

De la parte (a) calculamos $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(1-\cos\theta)}$

además, $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(2\underbrace{\frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}}_{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta}$

Reemplazando $\ddot{\theta}(\theta)$ y $\dot{\theta}^2(\theta)$ en (1) y (2):

$N_x = 4m\,OG\left(\frac{g}{L}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{2g}{L}\mathrm{sen}\,\theta(1-\cos\theta)\right)$

$N_y = 4mg - 4m\,OG\left(\frac{2g}{L}\cos\theta(1-\cos\theta) + \frac{g}{L}\mathrm{sen}^2\theta\right)$

$\Rightarrow N_x = 4mg\cdot\frac{3}{4}L\,\mathrm{sen}\,\theta(3\cos\theta-2)$; $N_y = mg(1-3\cos\theta)^2$

Interesa saber cuál reacción se anula primero.
$\Rightarrow$ Buscamos el valor θ_d para el cual cada una se hace cero.

$N_x = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta_{dx}(3\cos\theta_{dx}-2) = 0 \Rightarrow \theta_{dx} = \cos^{-1}(2/3)$

($\mathrm{sen}\,\theta_d = 0$ es la condición inicial para la cual no habría N_x)

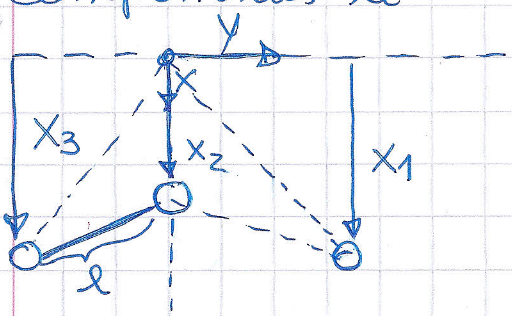
$N_y = 0 \Rightarrow 1-3\cos\theta_{dy} = 0 \Rightarrow \theta_{dy} = \cos^{-1}(1/3)$

Se observa que $\theta_{dx} < \theta_{dy} \Rightarrow$ Se separa primero de la pared vertical

P3

La Geometría:

Componentes x_i

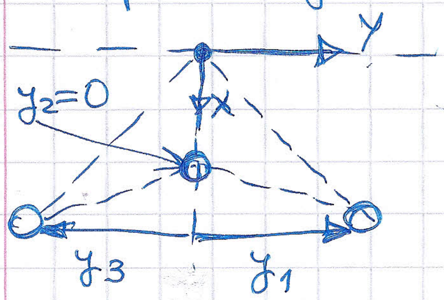


$x_1 = x_3 = d \operatorname{sen} \pi/3 = d\sqrt{3}/2.$

$x_2 = x_1 - l \operatorname{sen} \pi/6$; donde $2l \cos \pi/6 = d \Rightarrow x_2 = \frac{d\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{d}{\sqrt{3}}$

$$x_2 = \frac{d\sqrt{3}}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{6} = \frac{d\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Componentes y_i



$y_1 = -y_3 = d\cos\pi/3 = d/2$

$y_2 = 0$

Componentes z_i: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$

Entonces:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = m\left(\frac{d^2}{4} + 0 + \frac{d^2}{4}\right) = \frac{md^2}{2}.$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) = m\left(\frac{3d^2}{4} + \frac{d^2}{3} + \frac{3d^2}{4}\right) = \frac{11d^2}{6}m$$

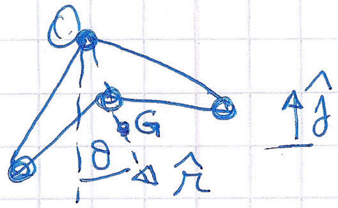
$$I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = m\left(\left(\frac{3d^2}{4} + \frac{d^2}{4}\right) + \frac{d^2}{3} + \left(\frac{3d^2}{4} + \frac{d^2}{4}\right)\right) = \frac{7d^2}{3}m$$

$$I_{xy} = I_{yx} = m\left(\frac{d^2\sqrt{3}}{4} + 0 + \left(-\frac{d^2\sqrt{3}}{4}\right)\right) = 0\ ;\ I_{xz} = I_{zx} = 0;\ I_{yz} = I_{zy} = 0$$

Los productos de Inercia son nulos $\Rightarrow$ (x, y, z) son ejes principales

$$[I_0] = md^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 11/6 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

b) $$\vec{h}_O = md^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 11/6 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \vec{\omega} = \omega_x \hat{\imath} \Rightarrow \vec{h}_O = (1/2)\, md^2 \omega_x \hat{\imath} \\ \text{Si } \vec{\omega} = \omega_y \hat{\jmath} \Rightarrow \vec{h}_O = (11/6)\, md^2 \omega_y \hat{\jmath} \\ \text{Si } \vec{\omega} = \omega_z \hat{k} \Rightarrow \vec{h}_O = (7/3)\, md^2 \omega_z \hat{k} \end{cases}$$



Frec. de oscilaciones pequeñas.
Cálculo del centro de masa.

$$\vec{OG} = \frac{1}{3m}\left(m x_2 + m d \cos \pi/6 + m d \cos \pi/6\right)\hat{r}$$

$d/\sqrt{3}$

$$\vec{OG} = \frac{4d\sqrt{3}}{9}\hat{r}$$

oscilaciones en torno al eje z: $\vec{\tau}_O = \frac{(d\vec{h}_O)_z}{dt} = 7/3\, md^2 \ddot{\theta}\hat{k}$ (1)

Pero además $\vec{\tau}_O = \vec{OG} \times 3mg(-\hat{\jmath}) = \frac{4d}{\sqrt{3}}\, mg \operatorname{sen}\theta\, (-\hat{k})$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4g\sqrt{3}}{7d}\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{(\omega_{po})_z = \left(\frac{4g\sqrt{3}}{7d}\right)^{1/2}}$

oscilaciones en torno al eje Y: Análogamente,

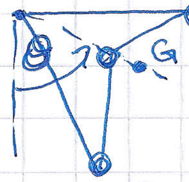
$\vec{\tau}_O = \frac{(d\vec{h}_O)_y}{dt} = (11/6)\, md^2 \ddot{\phi}$ (1)

$\vec{\tau}_O = \vec{OG} \times 3mg(-\hat{\jmath}) = \frac{4d\sqrt{3}}{9}\hat{r} \times 3mg(-\hat{\jmath}) = \frac{4d\sqrt{3}}{3} g \operatorname{sen}\phi (-\hat{k})$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{8g\sqrt{3}}{11d}\operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \boxed{(\omega_{po})_y = \left(\frac{8\sqrt{3}g}{11d}\right)^{1/2}}$

c) De la parte (b) sabemos que cuando la estructura gira en torno al eje z, la ecuación del movimiento para el $\measuredangle\theta$ es:

$$\ddot{\theta} + \omega_{poz}^2 \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (*)$$



Inicialmente $\theta(0) = \underbrace{\pi/2 - \pi/6}_{2\pi/6}$

$\dot{\theta}$ es máxima $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0$

Para nuestro caso la solución es $\theta_f = 0$, es decir cuando el centro de masa pasa por su punto más bajo (condición que también se puede verificar por energía).

Integramos $(*) \Rightarrow \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\omega_{poz}^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$\left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_0^{\dot{\theta}_{MAX}} = \omega_{poz}^2 \cos\theta \Big|_{\theta_0=\pi/3}^{\theta_f=0} = \omega_{poz}^2\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\omega_{poz}^2}{2}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_{max}^2 = \omega_{poz}^2 = \frac{4g\sqrt{3}}{7d}}$$