EJERCICIO N°1

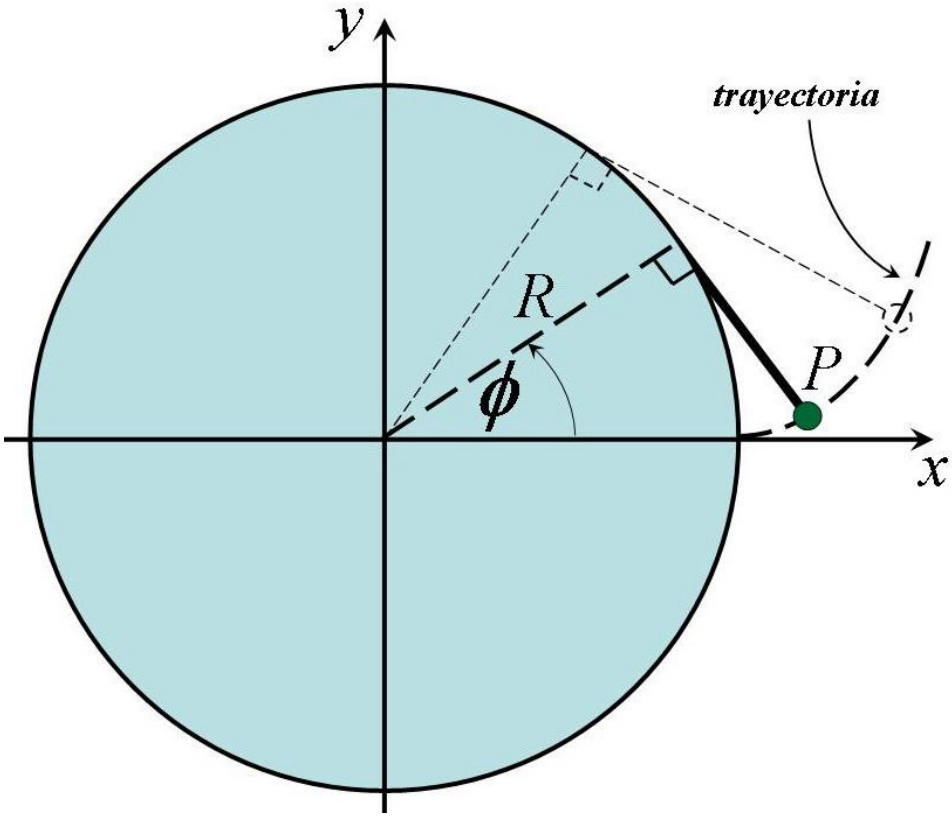
FI21A-2 Mecánica
Departamento de Física — **Tiempo: 0:40 hrs**
Escuela de Ingeniería y Ciencias — **9 Agosto 2005**
Universidad de Chile. — **Prof. Patricia Sotomayor C.**

La partícula P se encuentra ubicada en el extremo de un hilo, que se desenrolla desde un disco de radio R, como se muestra en la figura. El hilo se desenrolla de manera que la variación temporal del ángulo ϕ es una constante ω, es decir: $\dot{\phi} = \omega = cte$. Si se sabe que para $\phi = 0$ la partícula está en la posición $(x, y) = (R, 0)$ y además el hilo se mantiene siempre tenso, determine, en función de ϕ:

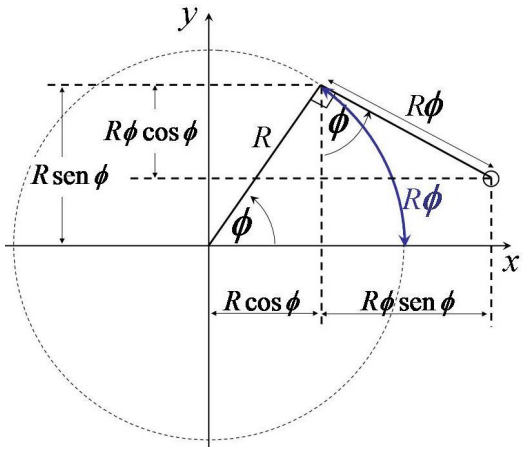
a) El vector posición de P en las coordenadas cartesianas de la figura.

b) Los vectores velocidad y aceleración de P, en coordenadas intrínsecas.

c) El radio de curvatura de la trayectoria de P y la posición del centro de curvatura.



Solución:



a) El vector posición:

$$x(\phi) = R\cos\phi + R\phi\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$y(\phi) = R\,\mathrm{sen}\,\phi - R\phi\cos\phi$$

=> $\boxed{\vec{r}(\phi) = R\left[(\cos\phi + \phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\hat{i} + (\mathrm{sen}\,\phi - \phi\cos\phi)\,\hat{j}\right]}$

b) La velocidad y aceleración en intrínsecas:

i) la velocidad:

Necesitamos determinar $\|\vec{v}\|$. En coordenadas cartesianas la velocidad está dada por:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = \frac{dx}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$v_x = R\,\omega\,(-\mathrm{sen}\,\phi + \mathrm{sen}\,\phi + \phi\cos\phi) = R\,\omega\,\phi\cos\phi$$
$$v_y = R\,\omega\,(\cos\phi - \cos\phi + \phi\,\mathrm{sen}\,\phi) = R\,\omega\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi$$

de donde $\dot{s} = \|\vec{v}\| = R\,\omega\,\phi$ => $\boxed{\vec{v} = R\omega\phi\,\hat{t}}$ (*)

ii) la aceleración:

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n} = a_t\,\hat{t} + a_n\,\hat{n}$$

de (*) $\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = R\omega\dot{\phi} = R\omega^2$

Para encontrar a_n primero determinamos $\vec{a}$ en cartesianas e igualamos $\|\vec{a}\|$

$$a_x = R\,\omega^2\,(\cos\phi - \phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\;\;;\; a_y = R\,\omega^2\,(\mathrm{sen}\,\phi + \phi\cos\phi)$$

$$\|\vec{a}\|^2 = R^2\omega^4(\cos^2\phi - 2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi + \phi^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi + \mathrm{sen}^2\,\phi + 2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi + \phi^2\cos^2\phi) = R^2\omega^4(1+\phi^2)$$

=> $a_n^2 = R^2\omega^4(1+\phi^2) - R^2\omega^4 = R^2\omega^4\phi^2$ => $a_n = R\omega^2\phi$ => $\boxed{\vec{a} = R\omega^2\,(\hat{t} + \phi)\,\hat{n}}$

c) El radio de curvatura y el centro de curvatura:

Sabemos que $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ => $\rho = \frac{R^2\omega^2\phi^2}{R\omega^2\phi}$ de donde: $\boxed{\rho = R\phi}$

El centro de curvatura, por construcción, está en el punto en que el hilo pierde contacto con el disco.