Sistemas Newtonianos

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Cristián Jauregui , Felipe Toledo

December 3, 2013

1 Problemas

P1. Las frecuencias propias (o de resonancia) de tres modos normales de oscilación sucesivos de una cuerda flexible son 60, 100 y 140 Hz, respectivamente.

(a) La cuerda ¿tiene extremos fijos, libres o uno fijo y uno libre?

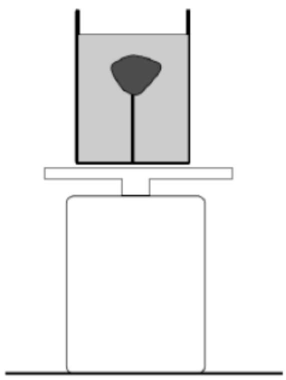
(b) ¿A qué armónicos (o sea, especifique los valores de n) corresponden estas frecuencias de resonancia?

P2. Una cuerda con ambos extremos fijos tiene modos de resonancia (normales) sucesivos, cuyas longitudes de onda son $0.54m$ y $0.48m$.

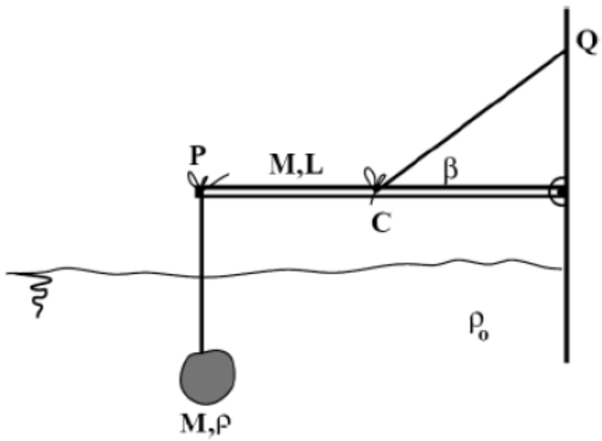
(a) ¿Cuál es el n de estos armónicos?

(b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

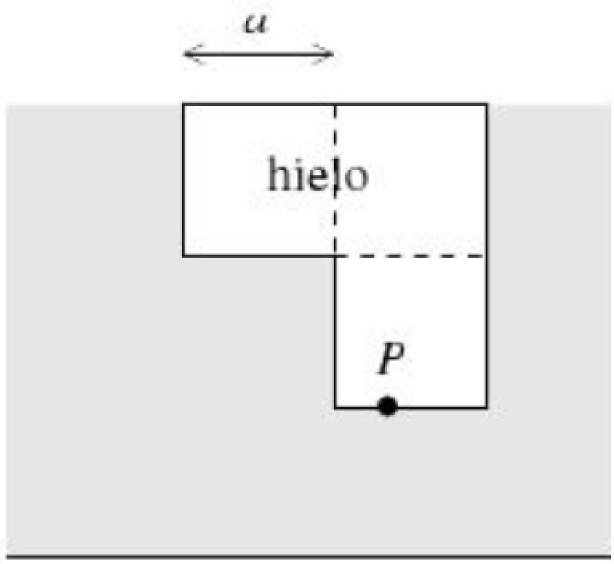
P3. Dentro de un vaso de masa despreciable, se vierte un volumen V_a de agua, de densidad ρ_a. Un cubo de hielo - de densidad ρ_h - permanece atado al fondo del vaso mediante una cuerda ideal. El hielo queda completamente cubierto por el agua. Al poner el vaso sobre la balanza, esta registra un peso P. Calcule la tensión de la cuerda.



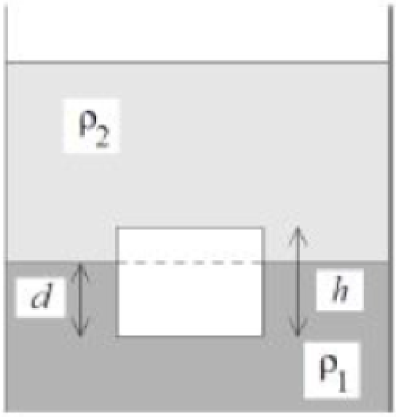
P4. Un tablón uniforme de masa M y longitud L se mantiene en forma horizontal como se ilustra en la figura. Una cuerda ideal la sostiene desde su punto medio C, y su extremo derecho permanece pivoteado (sin roce) contra la pared. Desde el extremo izquierdo P cuelga, quedando completamente sumergido en agua, un bloque de masa M y densidad $\lambda\rho_0$, con ρ_0 la densidad del agua, y $\lambda > 1$. El ángulo que forma la cuerda con la horizontal es β. Determine la tensión de la cuerda.



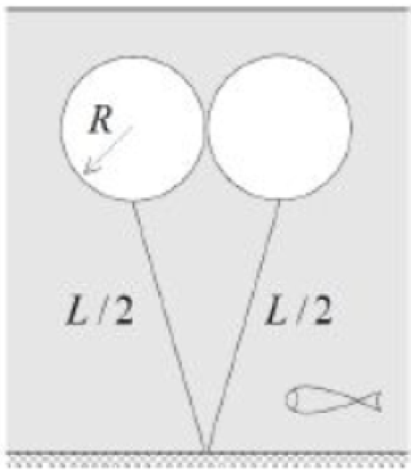
P5. Considere un bloque de hielo ($\rho = 920 kg/m^3$) en forma de "L", formado por tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua, como se indica en la figura. Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse, de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.



P6. Considere un cilindro de sección A y altura h que se encuentra flotando en la interfaz de dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Encuentre la densidad ρ del cilindro, si este se encuentra sumergido en el fluido 1 en una cantidad d.



P7. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R, se unen mediante una cuerda de largo L. Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.



2 Resolución de Problemas

P1. Es claro que las frecuencias no son múltiplos de enteros sucesivos de cierta frecuencia fundamental, de modo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo. Designamos como n_x el primer armónico, entonces (frecuencia menor asociada a armónico menor):

$$\frac{(2(n_x)-1)c/4L}{(2(n_x+1)-1)c/4L} = 60/100$$
$$\frac{2(n_x)-1}{2(n_x+1)-1} = 60/100$$
$$100(2(n_x)-1) = 60(2(n_x+1)-1)$$
$$80n_x = 160 \rightarrow n_x = 2$$

Los armónicos son $n_x = 2$, $n_x + 1 = 3$ y $n_x + 2 = 4$.

P2. La longitud de onda de modos normales de una cuerda de extremos fijos es de la forma $2L/n$. Definimos n_x como el n del modo normal menor, y $n_x + 1$ para el modo normal mayor (son sucesivos).

Es claro que la mayor longitud de onda corresponderá al n menor. Si dividimos las expresiones:

$$\frac{0.48m}{0.54m} = \frac{2L/(n_x+1)}{2L/(n_x)} = \frac{n_x}{n_x+1}$$
$$0.48(n_x+1) = 0.54n_x$$
$$n_x = \frac{0.48}{0.54-0.48} = 8$$

Los valores de n son 8 y 9. Entonces: $0.48m = 2L/9 \rightarrow L = \frac{9(0.48)}{2}m = 2.16m$.

P3. Consideramos que el volumen de hielo es V_h (desconocido), DCL:

El peso del hielo será: $W = M_{hielo}g = \rho_h V_h g$. Para calcular el empuje, la masa de agua desplazada será $M_{agua-desplazada} = V\rho_a = V_h\rho_a$, luego: $E = V_h\rho_a g$. Entonces, como el hielo está en equilibrio:

$$0 = E - Mg - T \rightarrow T = E - Mg = V_h g(\rho_a - \rho_h)$$

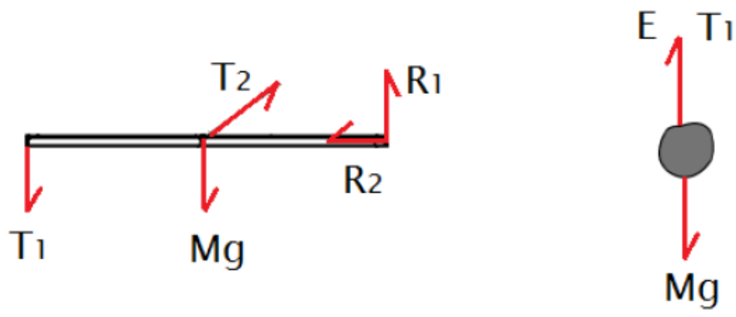
Como sabemos que el peso del agua y hielo suman P, luego:

$$P = (m_a + m_h)g = (V_a\rho_a + V_h\rho_h)g \rightarrow V_h = \frac{P}{\rho_h g} - \frac{V_a\rho_a}{\rho_h}$$

Finalmente:

$$T = (\frac{P}{\rho_h g} - \frac{V_a\rho_a}{\rho_h})g(\rho_a - \rho_h) = \frac{P\rho_a}{\rho_h} - P - \frac{V_a\rho_a^2 g}{\rho_h} + V_a\rho_a g$$

P4. DCL de los cuerpos:



Para el caso del tablón, imponemos que la suma de torques es nula (calculamos respecto al extremo derecho):

$$\tau = 0 = T_2(L/2)sin(\beta) - Mg(L/2) - T_1 L \to T_2 = \frac{Mg+2T_1}{sin(\beta)}$$

El volumen de agua desplazado por la masa es $V_{desplazado} = M_{cuerpo}/\rho_{cuerpo} = \frac{M}{\lambda\rho_0}$. Como el cuerpo está sumergido en equilibrio estático:

$$F = 0 = T_1 + E - Mg = T_1 + Masa_{desplazada}g - Mg = T_1 + (V_{desplazado}\rho_0)g - Mg$$

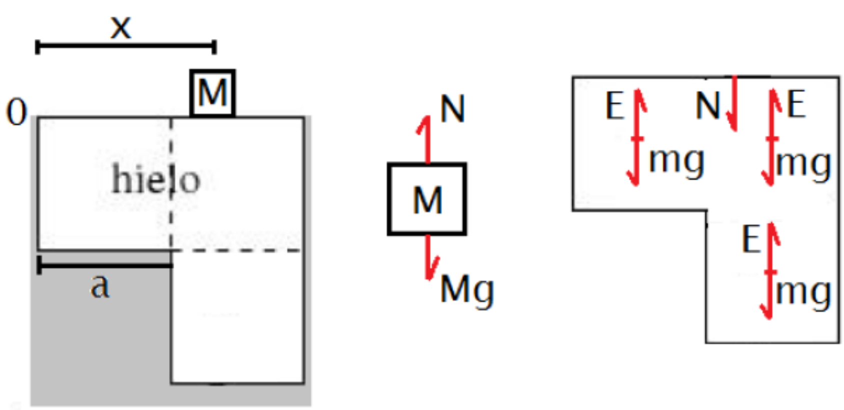
Entonces:

$$0 = T_1 + (\frac{M}{\lambda\rho_0}\rho_0)g - Mg = T_1 + (\frac{M}{\lambda} - M)g \to T_1 = (\frac{\lambda-1}{\lambda})Mg$$

Finalmente:

$$T_2 = \frac{Mg+2((\frac{\lambda-1}{\lambda})Mg)}{sin(\beta)} = \frac{(1+2(\frac{\lambda-1}{\lambda}))Mg}{sin(\beta)} = \frac{(3\lambda-2)Mg}{\lambda sin(\beta)}$$

P5. Consideramos el origen en el vertice superior izquierdo del hielo. El hielo está sumergido y siente empuje, a diferencia de la masa M, puesta a una distancia x. DCL:



Empezamos con suma de fuerzas (nulas):

$$F_{y-masa} = 0 = N - Mg \rightarrow N = Mg$$
$$F_{y-hielo} = 0 = -N + 3(E - mg) = -Mg + 3(E - mg) \rightarrow M = 3(\tfrac{E}{g} - m)$$

El volumen desplazado por cada trozo de hielo es $V_* = a^3$, y la masa de cada trozo de hielo es $m = \rho_h a^3$ (donde $\rho_h = \rho$). Entonces:

$$M = 3(\tfrac{E}{g} - m) = 3(\tfrac{a^3\rho_a g}{g} - \rho_h a^3) = 3a^3(\rho_a - \rho_h)$$
$$M = 3(0.25m)^3(1000 - 920)kg/m^3 = 3.75kg$$

Calculamos el torque con respecto al origen. Para cada trozo de hielo:

$$F_y = E - mg = a^3\rho_a g - \rho_h a^3 g = a^3 g(\rho_a - \rho_h)$$

Torque asociado a la fuerza normal:

$$\tau_N = -Nx = -Mgx$$

Torque asociado al hielo superior izquierdo (β es el ángulo entre el brazo de palanca y la vertical; d es la distancia entre el origen y el punto de aplicación de la fuerza):

$$sin(\beta) = a/2d$$
$$\tau_{h1} = F_y d sin(\beta) = a^4 g(\rho_a - \rho_h)/2$$

Torque por hielo superior derecho (β es el ángulo entre el brazo de palanca y la vertical; d es la distancia entre el origen y el punto de aplicación de la fuerza):

$$sin(\beta) = 3a/2d$$
$$\tau_{h2} = F_y d sin(\beta) = 3a^4 g(\rho_a - \rho_h)/2$$

Torque por hielo inferior derecho (β es el ángulo entre el brazo de palanca y la vertical; d es la distancia entre el origen y el punto de aplicación de la fuerza):

$$sin(\beta) = 3a/2d$$
$$\tau_{h3} = F_y d sin(\beta) = 3a^4 g(\rho_a - \rho_h)/2$$

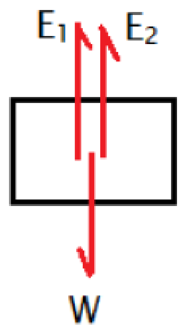
La suma de torque es:

$$0 = -Mgx + 7a^4 g(\rho_a - \rho_h)/2 \rightarrow x = \tfrac{7a^4(\rho_a - \rho_h)}{2M}$$

Reemplazando:

$$x = \tfrac{7(0.25m)^4(1000-920)km/m^3}{2(3.75kg)} = 0.29m$$

P6. DCL del sistema:



El peso del cilindro (W) viene dado por:

$$W = M_{cilindro}g = V_{cilindro}\rho_{cilindro}g = Ah\rho g$$

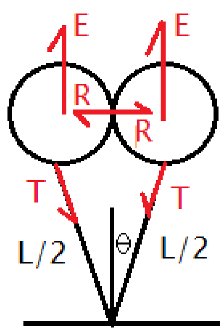
Para calcular los empujes asociados a cada medio, notamos que el cilindro está sumergido una altura d en el medio ρ_1 y una altura $(h-d)$ en el medio ρ_2. Luego:

$$E_1 = Ad\rho_1 g$$
$$E_2 = A(h-d)\rho_2 g$$

Luego:

$$0 = Ad\rho_1 g + A(h-d)\rho_2 g - Ah\rho g \rightarrow \rho = \rho_2 + \frac{d}{h}(\rho_1 - \rho_2)$$

P7. Asumiremos que la masa de los globos es despreciable (no consideraremos su peso). DCL:



Es claro que $\theta = asin(\frac{R}{L/2}) = asin(\frac{2R}{L})$ (ahora conocido). Luego, para cada globo:

$$F_y = 0 = E - Tcos(\theta) = \rho_{fluido} V_{globo} g - Tcos(\theta) = \rho_{agua} \frac{4}{3} \pi R^3 g - Tcos(\theta)$$
$$T = \frac{4\pi R^3 g \rho_{agua}}{3cos(\theta)}$$

Por otro lado:

$$F_x = 0 = Tsin(\theta) - R \rightarrow R = Tsin(\theta) = \frac{4\pi R^3 g \rho_{agua}}{3} tan(\theta)$$