

Sistemas Newtonianos - Preparación Control 2 (Pauta)

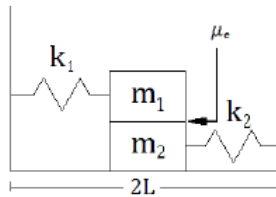
Profesor: Roberto Rondanelli

Auxiliares: Álvaro Aravena, Cristián Jáuregui, Felipe Toledo

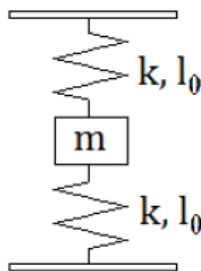
November 14, 2013

1 Problemas

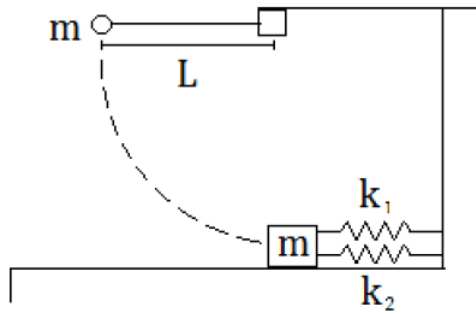
- P1. Se superponen dos masas en presencia de dos resortes de largo natural L , como se indica en la figura. Calcule la amplitud máxima de oscilación de modo que ambas masas no se separen, gracias a la presencia de una fuerza de roce estático (de constante μ_e).



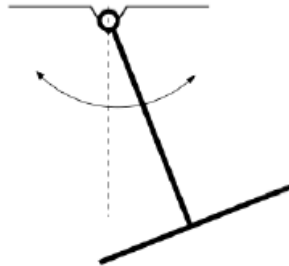
- P2. Considerando que inicialmente ($t = 0$), ambos resortes están en su largo natural y el bloque está en reposo. Determinar la ecuación de movimiento del bloque, la frecuencia angular, período de oscilaciones y amplitud.



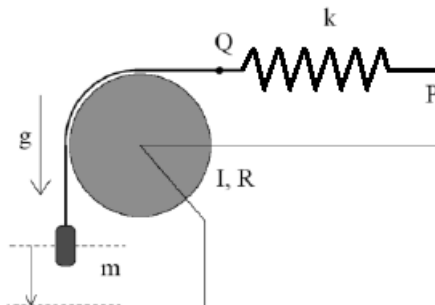
- P3. Se suelta la masa de un péndulo desde el reposo, de modo tal que desciende y choca elásticamente con un bloque de igual masa m . Encontrar la ecuación de movimiento del bloque tras la colisión, considerando que en $t = 0$ los resortes están en su largo natural l_0 . Ignore la presencia del péndulo después del choque.



- P4. Una T simétrica formada por dos barras homogéneas idénticas de longitud L , pende sin fricción del extremo libre de su barra central. En presencia de la gravedad terrestre g , la T oscila manteniéndose siempre en el plano de la figura. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

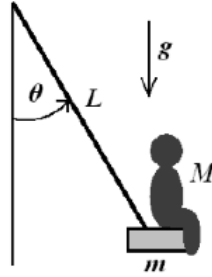


- P5. El sistema de la figura consiste en una carga de masa m que pende de una cuerda ideal que en el punto Q se une a un resorte. El resorte, dispuesto en forma horizontal, está sujeto a una pared fija en el punto P . La constante elástica del resorte es k y su extremo en Q nunca entra en contacto con la rueda. Esta última tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje central, y además puede girar sin fricción en torno a este. La cuerda en contacto con la rueda nunca resbala. Si la carga es soltada del reposo desde la altura mínima para la cual el resorte no sufre estiramiento, determine la frecuencia de las oscilaciones del sistema.



P6. Un niño de masa M está sentado en un columpio de masa m y largo L . El coeficiente de roce viscoso del columpio y el niño con el aire es b . Si el columpio se empuja con una fuerza $\vec{F} = F_0 \sin(\omega t) \hat{\theta}$, donde $\hat{\theta}$ es la dirección tangencial al movimiento del columpio (es decir, perpendicular siempre a la cuerda, y en dirección de θ creciente), se le pide detallar:

- (a) La ecuación de movimiento del columpio.
- (b) El periodo de pequeñas oscilaciones.
- (c) La frecuencia ω_r de resonancia del columpio.

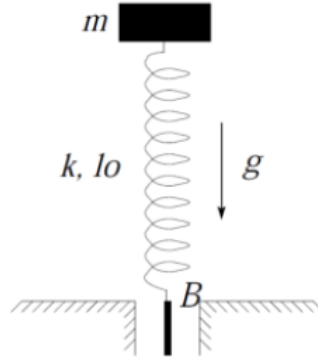


P7. Una masa de 2 [kg] oscila colgada de un resorte de constante $k = 400 \text{ [N/m]}$. La constante de amortiguamiento de la situación es $\nu = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud $F_0 = 10 \text{ [N]}$ y la frecuencia angular $\omega = 10 \text{ [rad/s]}$.

- (a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones en el régimen estacionario?
- (b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?
- (c) Encuentre la amplitud de las vibraciones en la resonancia.

P8. Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0 , bajo la acción de gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

- (a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa.
- (b) En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t) \hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa.
- (c) Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas.
- (d) Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?



- P9. Un pulso se mueve en la dirección x en un sistema de varillas acopladas por torsión τ , todas las varillas de igual largo $L = 0.2 \text{ m}$, masa $m = 0.3 \text{ kg}$, separación $\Delta = 0.01 \text{ m}$, y de diámetro muy pequeño. El pulso está descrito por:

$$\theta(x, t) = Ae^{-(ax+bt)^2}$$

Con $A = 0.2 \text{ rad}$, $a = 1 \text{ m}^{-1}$ y $b = 0.05 \text{ s}^{-1}$. Determine:

- La dirección de movimiento del pulso.
- La velocidad de propagación del pulso.
- La constante de torsión τ entre las varillas.

- P10. Se tienen dos pulsos descritos por las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2}$$

$$y_2 = -\frac{5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

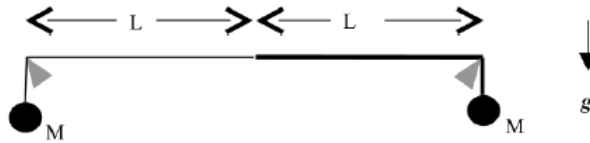
- ¿En qué dirección viaja cada pulso?
- ¿En qué instante se cancelan los dos pulsos en todos los puntos?
- ¿En cuál punto siempre se cancelan las ondas?

P11.

- Demuestre que $y = x^2 + v^2 t^2$ es solución de la ecuación de ondas.
- Muestre que y puede escribirse de la forma $y = f(x - vt) + g(x + vt)$
- Lo mismo para $y = \sin(x)\cos(vt)$

- P12. Dos cuerdas de densidad lineal de masa R y $2R$ se unen entre sí, con la cuerda de mayor densidad en el lado derecho. Los extremos de la cuerda están unidos a sendas masas M . Se dispone de dos pivotes, separados una distancia $2L$, sobre los

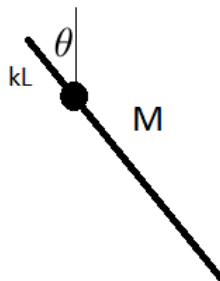
cuales posa la cuerda en forma horizontal como se indica en la figura. En un cierto instante se generan dos pulsos idénticos y simétricos en cada uno de los extremos de la cuerda. Determine la distancia, medida desde el extremo izquierdo de la cuerda, donde se encuentran los puntos centrales de ambos pulsos.



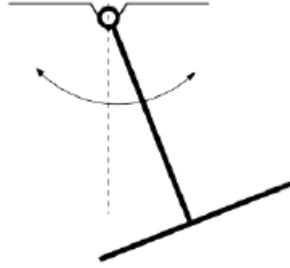
- P13. Una partícula de masa m está unida a dos resortes iguales, de constante elástica k y largo natural nulo cuyos otros extremos están unidos a una caja de largo L , tal como se ve en la figura. Mediante algún mecanismo, la caja oscila horizontalmente de manera que la posición de su extremo izquierdo respecto al punto fijo O es $x_I(t) = A \cos(\omega t)$. Encuentre la ecuación de movimiento de la partícula.



- P14. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones de una barra de largo L y masa M que es capaz de rotar en torno a un punto de apoyo ubicado a una distancia kL de su borde superior, donde $0 < k < 0.5$.



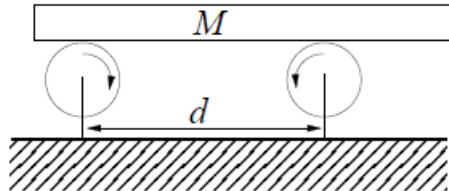
- P15. Una T simétrica formada por dos barras homogéneas idénticas de longitud L , pende sin fricción del extremo libre de su barra central. En presencia de la gravedad terrestre g , la T oscila manteniéndose siempre en el plano de la figura. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema (**Este ejercicio ya fue resuelto utilizando dinámica, ahora hágalo utilizando conservación de la energía**).



P16. Considere un objeto de masa M que puede oscilar alrededor de un eje que lo atraviesa. Sea I el momento de inercia para rotaciones alrededor de ese eje y L la distancia entre el eje y el centro de masas del objeto.

- (a) Encuentre el periodo T para pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio.
- (b) Demuestre que un péndulo simple equivalente (igual período) tiene un largo $L_0 = \frac{I}{mL}$

P17. Considere dos cilindros que giran rápidamente en sentidos contrarios tal como se muestra en la figura adjunta. Sobre estos cilindros se coloca un tablón de masa M y densidad uniforme. Sea d la distancia entre los dos cilindros y sea μ el coeficiente de roce cinemático entre el tablón y los cilindros. Demuestre que el movimiento del tablón es armónico. Encuentre el período del movimiento.



P18. Un oscilador formado por un resorte y un cuerpo de masa $m = 1kg$ está inmerso en un medio viscoso. Las oscilaciones son amortiguadas de modo que la amplitud de cada ciclo es un tercio de la amplitud del ciclo anterior. Si la constante elástica es $k = 40N/m$, determinar el período de las oscilaciones.

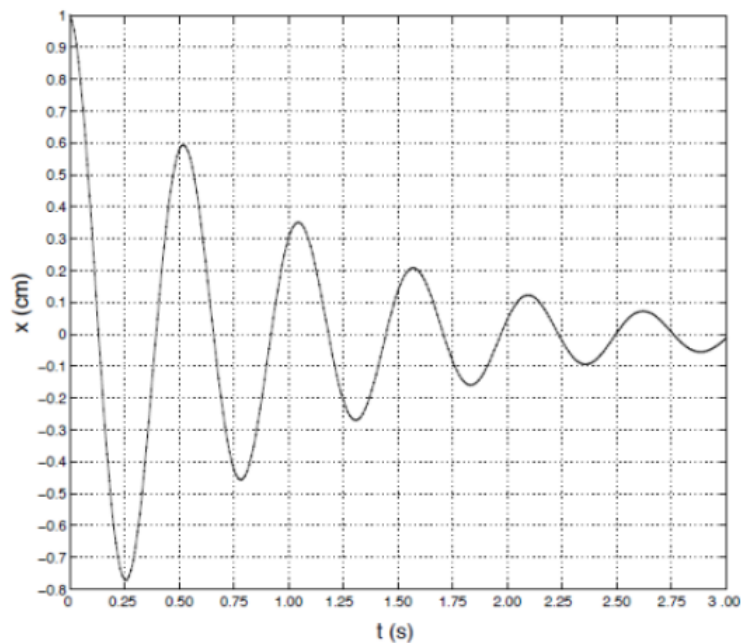
P19.

- (a) Demuestre que $y = 4x^2 + 9t^2 + 12xt + 12x + 18t + 30$ es solución de la ecuación de ondas.
- (b) ¿En qué dirección avanza la onda?

P20. Un oscilador formado por un resorte y un cuerpo de masa m está inmerso en un medio viscoso. Las oscilaciones resultan amortiguadas de forma tal que, partiendo

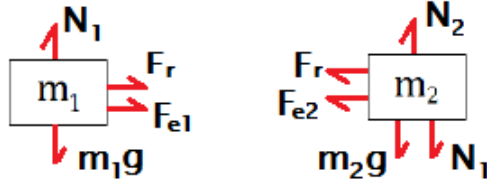
de una amplitud A , al cabo de cinco ciclos su amplitud es $A/3$. El lapso de cada ciclo es de 0.2 [s] .

- (a) Determine la frecuencia angular ω_0 del oscilador.
 - (b) Determine la velocidad terminal de caída del mismo cuerpo, si es dejado caer libre y verticalmente en el mismo medio, bajo la acción de la gravedad.
- P21. Se tiene un oscilador mecánico amortiguado, compuesto por un carro de masa $m = 0.54 \text{ [Kg]}$ y un resorte de constante de rigidez k . El carro se mueve sobre un riel lubricado, de modo que el roce está bien descrito por una ley de roce viscoso lineal. Dadas ciertas condiciones iniciales, se obtiene una serie de medidas de la posición x del carro en función del tiempo t . Estos resultados se presentan en el gráfico adjunto. A partir de él, obtenga una estimación del valor de k para el sistema.



2 Resolución de problemas

- P1. Situamos un eje horizontal con $x = 0$ en el centro del sistema (coincidente con el largo natural de ambos resortes). Se impone una dirección arbitraria para F_r y opuesto para cada masa y, para conservar generalidad, se considera que no necesariamente es positivo. La fuerza elástica se dibuja "alejándose del resorte" y se utilizará la fórmula $F_e = -k\Delta x$. DCL asociados:



Es claro que:

$$\begin{aligned}
 N_1 - m_1g &= 0 \rightarrow N_1 = m_1g \\
 m_1a_{1x} &= F_r + F_{e1} = F_r + (-k_1\Delta x) = F_r - k_1x \\
 N_2 - m_2g - N_1 &= 0 \rightarrow N_2 = m_2g + N_1 = (m_1 + m_2)g \\
 m_2a_{2x} &= -F_{e2} - F_r = -(-k_2\Delta x) - F_r = +k_2(-x) - F_r = -k_2x - F_r
 \end{aligned}$$

Es claro que, como las masas no se separan, la aceleración en el eje x de ambos cuerpos coincide ($a_{1x} = a_{2x} = a$)

$$\begin{aligned}
 m_1a &= F_r - k_1x \\
 m_2a &= -k_2x - F_r
 \end{aligned}$$

Uniando las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_r - k_1x}{m_1} &= \frac{-k_2x - F_r}{m_2} \\
 F_r m_2 - k_1 m_2 x &= -k_2 m_1 x - F_r m_1 \\
 x &= \frac{F_r(m_1 + m_2)}{k_1 m_2 - k_2 m_1}
 \end{aligned}$$

Los casos límite son cuando $F_r = \pm \mu_e N_1 = \pm \mu_e m_1 g$

$$x_{max} = \pm \frac{\mu_e m_1 (m_1 + m_2) g}{m_2 k_1 - m_1 k_2}$$

Y como la amplitud se define como positiva:

$$A_{max} = \frac{\mu_e m_1 (m_1 + m_2) g}{|m_2 k_1 - m_1 k_2|}$$

Podemos también calcular la frecuencia natural de oscilaciones, sabemos que:

$$\begin{aligned}
 m_1a &= F_r - k_1x \\
 m_2a &= -k_2x - F_r
 \end{aligned}$$

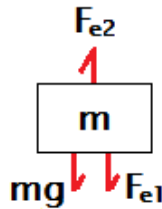
Despejamos:

$$\begin{aligned}
m_1 a + k_1 x &= -k_2 x - m_2 a \\
a + \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2} x &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2} x &= 0
\end{aligned}$$

Lo que representa un MAS con:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}$$

P2. Situamos un eje vertical con $y = 0$ en el centro del sistema (coincidente con el largo natural de ambos resortes), positivo hacia arriba. La fuerza elástica se dibuja "alejándose del resorte" y se utilizará la fórmula $F_e = -k\Delta x$. DCL asociado:



Ecuaciones:

$$\begin{aligned}
F_y &= F_{e2} - F_{e1} - mg \\
F_y &= (-ky) - (-k(-y)) - mg = -2ky - mg \\
m\ddot{y} &= -2ky - mg \\
\ddot{y} + \frac{2k}{m}y + g &= 0
\end{aligned}$$

Notamos que no es movimiento armónico simple escrito de esta forma. Pero si usamos una variable $z = y + \frac{gm}{2k}$, es claro que $\ddot{z} = \ddot{y}$. Entonces reemplazamos:

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + \frac{2k}{m}\left(z - \frac{gm}{2k}\right) + g &= 0 \\
\ddot{z} + \frac{2k}{m}z &= 0
\end{aligned}$$

Lo que sí es movimiento armónico simple. Donde:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \\
T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}
\end{aligned}$$

Las soluciones de este movimiento son del tipo:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

Luego, como $y = z - \frac{gm}{2k}$:

$$\begin{aligned}y(t) &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0) - \frac{gm}{2k} \\ \dot{y}(t) &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)\end{aligned}$$

Y como sabemos que $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{y}(0) &= -A \omega_0 \sin(\theta_0) = 0 \rightarrow \sin(\theta_0) = 0 \rightarrow \theta_0 = 0 \\ y(0) &= A \cos(0) - \frac{gm}{2k} = A - \frac{gm}{2k} = 0 \rightarrow A = \frac{gm}{2k}\end{aligned}$$

Luego, la amplitud es $\frac{gm}{2k}$, y la ecuación de movimiento es:

$$y(t) = \frac{gm}{2k} \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}} t) - \frac{gm}{2k}$$

P3. La velocidad de la masa del péndulo justo antes del choque se puede calcular empleando conservación de la energía.

$$\begin{aligned}E_i &= K + U_g = mgL \\ E_f &= K + U_g = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gL}\end{aligned}$$

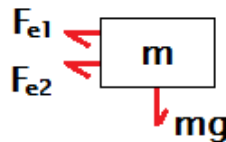
En un choque elástico se conserva el momentum lineal y la energía. Luego:

$$\begin{aligned}p_i &= m\sqrt{2gL} \\ p_f &= mv_1 + mv_2 \rightarrow \sqrt{2gL} = v_1 + v_2 \\ E_i &= \frac{1}{2}mv^2 = mgL \\ E_f &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow 2gL = v_1^2 + v_2^2\end{aligned}$$

Si v_1 es la velocidad tras el choque de la masa adherida a los resortes:

$$\begin{aligned}2gL &= v_1^2 + (\sqrt{2gL} - v_1)^2 \\ 2gL &= v_1^2 + 2gL - 2v_1\sqrt{2gL} + v_1^2 \\ 0 &= 2v_1^2 - 2v_1\sqrt{2gL} \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL}\end{aligned}$$

Nos olvidamos del choque: tenemos una masa unida a dos resortes con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = \sqrt{2gL}$. DCL del sistema (origen en la posición del largo natural de los resortes):



Ecuaciones:

$$F_x = -F_{e1} - F_{e2} = -(-k_1(-x)) - (-k_2(-x)) = -(k_1 + k_2)x$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0$$

Lo que es un MAS con $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$, con soluciones del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

Por las condiciones iniciales:

$$x(0) = A \cos(\theta_0) = 0 \rightarrow \cos(\theta_0) = 0 \rightarrow \theta_0 = \pi/2$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\pi/2) = \sqrt{2gL} \rightarrow A = -\frac{\sqrt{2gL}}{\omega_0} = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1 + k_2}}$$

Luego:

$$x(t) = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1+k_2}} \cos(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \pi/2)$$

- P4. Es un péndulo físico con momento de inercia I , lo calculamos (asumimos que M es la masa de cada parte de la T):

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + (\frac{1}{12}ML^2 + ML^2) = \frac{17}{12}ML^2$$

Consideremos un ángulo θ con respecto a la vertical, el torque que siente el cuerpo viene dado por:

$$-(Masa)g(Distancia)\sin(\theta) = \tau$$

$$-(2M)g(L_{cm})\sin(\theta) = \tau$$

$$-2Mg(\frac{ML/2+ML}{M+M})\sin(\theta) = I\alpha$$

$$-\frac{3gL}{2}\sin(\theta) = \frac{17}{12}L^2\alpha$$

Sabemos que $\alpha = \ddot{\theta}$, entonces:

$$\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\sin(\theta) = 0$$

Para pequeñas oscilaciones, $\sin(\theta) = \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\theta = 0$$

Lo que es MAS con $\omega_0^2 = \frac{18g}{17L}$

- P5. Utilizamos un método alternativo al de suma de torques, calculamos la energía del sistema. Situamos en $y = 0$ la altura inicial del sistema e y representa la posición de la masa con respecto a ese sistema de referencia, es claro que el estiramiento del resorte será el inverso aditivo de la posición de la masa (si la posición de la masa es y^* , el resorte está estirado $-y^*$).

$$\text{Energía potencial elástica: } U_e = \frac{1}{2}k(-y)^2 = \frac{ky^2}{2}$$

$$\text{Energía potencial gravitatoria: } U_g = mgy$$

$$\text{Energía cinética: } K = K_{Polea} + K_{Masa} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Como la cuerda es ideal y no resbala, existen relaciones entre $\dot{y}$ y $\dot{\theta}$, se tiene: $\dot{y}/R = \dot{\theta}$. Incorporando esta fórmula, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{ky^2}{2} + mgy + \frac{1}{2}I(\dot{y}/R)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Como la energía se conserva, su derivada es nula:

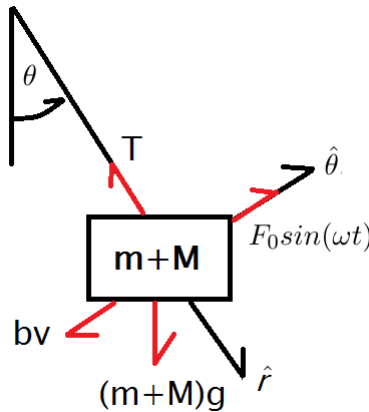
$$\begin{aligned}\dot{E}_m = 0 &= \frac{k}{2}2y\dot{y} + mg\dot{y} + \frac{1}{2R^2}I2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m2\dot{y}\ddot{y} \\ 0 &= ky + \ddot{y}\left(\frac{I}{R^2} + m\right) + mg \\ \ddot{y} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}y + \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)} &= 0\end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variables $z = y + \frac{mg}{k}$ y $\ddot{z} = \ddot{y}$, reemplazamos:

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}\left(z - \frac{mg}{k}\right) + \frac{mg}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}z &= 0\end{aligned}$$

Que es MAS con $\omega_0^2 = \frac{k}{\left(\frac{I}{R^2} + m\right)}$

- P6. DCL del sistema, notamos que fijamos un eje paralelo y otro perpendicular a la tensión del columpio, y tratamos al niño y el columpio como una masa puntual de masa $(m + M)$.



Como se pretende calcular la frecuencia de oscilaciones, trabajamos con torque. Por otro lado, $v = \omega R = \dot{\theta}L$ y $I_{m+M} = (m+M)R^2 = (m+M)L^2$. Luego:

$$I_{m+M}\ddot{\theta} = \tau = F_0 \sin(\omega t)L - b\dot{\theta}L^2 - (m+M)g \sin(\theta)L$$

Asumiendo pequeñas oscilaciones, $\sin(\theta) = \theta$:

$$\begin{aligned} (m+M)L^2\ddot{\theta} &= F_0 \sin(\omega t)L - b\dot{\theta}L^2 - (m+M)g\theta L \\ \ddot{\theta} + \frac{b}{M+m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta &= \frac{F_0}{(m+M)L} \sin(\omega t) \\ \ddot{\theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta &= \frac{F_0}{(m+M)L} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{b}{M+m} \\ \omega_0^2 &= \frac{g}{L} \end{aligned}$$

La frecuencia de resonancia será aquella que haga que el término dentro de la función raíz sea un mínimo.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \\ \frac{df}{d\omega} &= -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\frac{\omega}{\tau^2} = 0 \rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = \frac{g}{L} - \frac{b^2}{2(M+m)^2} \end{aligned}$$

Para comprobar que es un mínimo basta con derivar, reemplazar $\omega = \omega_r$ y verificar que sea mayor que cero.

- P7. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son: forzaje, peso, roce viscoso y fuerza elástica. Suma de fuerzas (situamos origen de sistema de referencias en el largo natural del resorte):

$$\begin{aligned} F_y = m\ddot{y} &= -mg + k(\Delta y) - b\dot{y} + F_0 \sin(\omega t) = -mg + k(-y) - b\dot{y} + F_0 \sin(\omega t) \\ m\ddot{y} &= -ky - mg - b\dot{y} + F_0 \sin(\omega t) \\ \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Lo que se parece a la ecuación conocida, pero es necesario quitar un término (cambio de variables: $z = y + \frac{mg}{k} \rightarrow \dot{z} = \dot{y} \rightarrow \ddot{y} = \ddot{z}$).

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}\left(z - \frac{mg}{k}\right) + g &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \\ \ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \\ \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

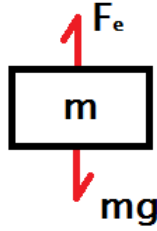
Luego, la amplitud del regimen estacionario es:

$$A^* = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} = \frac{10N/2kg}{\sqrt{(\frac{400N/m}{2kg} - (10rad/s)^2)^2 + (\frac{10rad/s}{\frac{2}{1s^{-1}}})^2}} = 0.05m$$

La resonancia ocurre cuando A^* sea máximo, y como en el numerador de la fracción solo se presentan constantes, buscamos el mínimo del argumento de la función raíz, derivamos:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2 \\ \frac{df}{d\omega} &= -2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 2(\frac{\omega}{\tau}) \frac{1}{\tau} = 0 \\ -4(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2}{\tau^2} &= 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{400N/m}{2kg} - \frac{1}{2(2s)^2}} = 14.14[s^{-1}] \end{aligned}$$

P8. Fijamos el sistema de referencias con el origen en la base del resorte, DCL:



Luego:

$$F_y = -k(\Delta y) - mg = -k(y - l_0) - mg = 0 \rightarrow y = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Entonces el punto de equilibrio es $(l_0 - \frac{mg}{k})$ desde la base del resorte.

Si el punto B tiene una ecuación de movimiento $r_B(t) = A_0 \sin(\omega t)$, el estiramiento del resorte viene dado por: $\Delta y(t) = y(t) - l_0 - r_B(t)$, entonces:

$$\begin{aligned} F_y = m\ddot{y} &= -k(\Delta y) - mg = -k(y - l_0 - A_0 \sin(\omega t)) - mg \\ \ddot{y} + \frac{k}{m}y &= \frac{k}{m}A_0 \sin(\omega t) - g + \frac{k}{m}l_0 \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variables situando el origen en la posición de equilibrio $z = y - l_0 + \frac{mg}{k} \rightarrow \ddot{y} = \ddot{z}$:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{k}{m}(z + l_0 - \frac{mg}{k}) &= \frac{k}{m}A_0 \sin(\omega t) - g + \frac{k}{m}l_0 \\ \ddot{z} + \frac{k}{m}z &= \frac{k}{m}A_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Las soluciones son de la forma (no hay amortiguamiento y eliminamos el término exponencial y $\tau \rightarrow \infty$):

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

Como $z(0) = 0$, es claro que $\phi_0 = \pi/2$; además $F_0/m = A_0 k/m = A_0 \omega_0^2$ ($\omega_0^2 = k/m$). Entonces:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

Por otro lado, $\dot{z}(0) = 0$, derivamos y reemplazamos:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \omega \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \\ \dot{z}(0) &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \frac{\pi}{2}) + \omega \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega \cdot 0) = 0 \\ -A \omega_0 + \omega \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} &= 0 \\ A &= \omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} z(t) &= \omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \\ z(t) &= -\omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega_0 t) + \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \\ y(t) &= -\omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega_0 t) + \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) + l_0 - \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

Los valores mayores y menores de $y(t)$ se alcanzan cuando el valor absoluto de las funciones $\sin$ se maximiza. Como $\omega_0 > \omega$, el mínimo de la trayectoria de la masa se alcanza cuando $\sin(\omega t) = -1$ y $\sin(\omega_0 t) = 1$. Luego:

$$y_{min} = -\omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + l_0 - \frac{mg}{k}$$

Imponiendo que no choque con la mesa (caso límite):

$$\begin{aligned} y_{max} &= -\omega \omega_0 \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + l_0 - \frac{mg}{k} = 0 \\ y_{max} &= \frac{-A_0 \omega_0 (\omega_0 + \omega)}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} + l_0 - \frac{mg}{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{max} &= \frac{-A_0\omega_0}{(\omega_0 - \omega)} + l_0 - \frac{mg}{k} = 0 \\
\frac{A_0\omega_0}{\frac{mg}{k} - l_0} + \omega_0 &= \omega \\
\frac{kA_0\omega_0}{mg - kl_0} + \omega_0 &= \omega < \omega_0
\end{aligned}$$

P9. Para encontrar la dirección del pulso, se escribe como función de la forma $f(x + ct)$ o $f(x - ct)$.

$$\begin{aligned}
\theta(x, t) &= Ae^{-(ax+bt)^2} = Ae^{-(a(x+\frac{b}{a}t))^2} = f(x + ct) \\
\text{Donde } f(w) &= Ae^{(-aw)^2} \text{ y } c = \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

En base al signo que acompaña a c en la función, la propagación del pulso es hacia la izquierda y la velocidad de propagación es $\frac{b}{a} = \frac{0.05s^{-1}}{1m^{-1}} = 0.05 \frac{m}{s}$.

Por otro lado, para el caso de las varillas, se tiene la expresión:

$$c = \sqrt{T\Delta^2/I} \rightarrow T = \frac{Ic^2}{\Delta^2}$$

Como el momento de inercia de una barra de masa m y largo L con respecto a su centro de masas es $\frac{1}{12}mL^2$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{mL^2c^2}{12\Delta^2} = \frac{(0.3kg)(0.2m)^2(0.05m/s)^2}{12(0.01m)^2} \\
T &= 0.025 \text{ kgm}^2/s^2
\end{aligned}$$

P10. Para encontrar la dirección de cada pulso, se escribe cada función de la forma $f(x + ct)$ o $f(x - ct)$.

$$\begin{aligned}
y_1(x, t) &= \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} = \frac{5}{(3(x - \frac{4}{3}t))^2 + 2} = f(x - ct) \\
\text{Donde } f(a) &= \frac{5}{(3a)^2 + 2} \text{ y } c = \frac{4}{3} \\
y_2(x, t) &= -\frac{5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2} = -\frac{5}{(3(x + \frac{4}{3}t) - 6)^2 + 2} = g(x + ct) \\
\text{Donde } f(b) &= -\frac{5}{(3b - 6)^2 + 2} \text{ y } c = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

En base al signo que acompaña a c , es claro que el primer pulso viaja hacia la derecha y el segundo viaja hacia la izquierda.

Para encontrar el instante en que se cancelan los dos pulsos en todos los puntos, y el punto en que los pulsos se anulan para cualquier tiempo, debemos imponer que la suma de pulsos es nula y luego impondremos condiciones sobre x y t .

$$y_1(x, t) + y_2(x, t) = 0 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} - \frac{5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

$$\frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} = \frac{5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

$$(3x - 4t)^2 = (3x + 4t - 6)^2$$

Calculemos el tiempo en que los pulsos se anulan en todos los puntos, igualamos los términos que acompañan a $(3x)$:

$$-4t = 4t - 6$$

$$t = \frac{3}{4}$$

En $t = \frac{3}{4}$ los pulsos se anulan en todos los puntos, pues para todo x , se tiene que $(3x - 4t)^2 = (3x + 4t - 6)^2$

Calculemos el punto en que los pulsos se anulan para todo tiempo, igualamos los términos que acompañan a $(\pm 4t)$ (uno con signo negativo, pues el signo de $4t$ cambia en cada caso):

$$3x = -3x + 6$$

$$x = 1$$

En $x = 1$ los pulsos se anulan siempre, pues para todo t , se tiene que $(3x - 4t)^2 = (3x + 4t - 6)^2$

P11.

- (a) Calculamos las derivadas parciales (se asume que todas las variables con respecto a las cuales no se está derivando actúan como si fueran constantes).

Luego, si $y = x^2 + v^2 t^2$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2tv^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2v^2$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2v^2 = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Luego, satisface la ecuación de ondas.

(b) Juguemos con ecuaciones cuadráticas (es intuitivo).

$$\begin{aligned}(x - ct)^2 &= x^2 + c^2t^2 - 2cxt \\ (x + ct)^2 &= x^2 + c^2t^2 + 2cxt \\ (x - ct)^2 + (x + ct)^2 &= 2x^2 + 2c^2t^2\end{aligned}$$

Luego, podemos escribir la función como:

$$f(x - vt) + g(x + vt) = \frac{1}{2}(x - vt)^2 + \frac{1}{2}(x + vt)^2 = x^2 + v^2t^2$$

(c) Calculamos las derivadas parciales para $y = \sin(x)\cos(vt)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \cos(vt)\cos(x) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -\cos(vt)\sin(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -v\sin(x)\sin(vt) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -v^2\sin(x)\cos(vt)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -v^2\sin(x)\cos(vt) = v^2(-\sin(x)\cos(vt)) = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Luego, satisface la ecuación de ondas.

Juguemos con funciones trigonométricas (intuitivo):

$$\begin{aligned}\sin(x + ct) &= \sin(x)\cos(ct) + \cos(x)\sin(ct) \\ \sin(x - ct) &= \sin(x)\cos(ct) - \cos(x)\sin(ct) \\ \sin(x + ct) + \sin(x - ct) &= 2\sin(x)\cos(ct)\end{aligned}$$

Luego, podemos escribir la función como:

$$f(x - vt) + g(x + vt) = \frac{1}{2}\sin(x + vt) + \frac{1}{2}\sin(x - vt) = \sin(x)\cos(vt)$$

P12. Es fácil notar, a partir de un DCL, que la tensión en la cuerda es Mg . Como la velocidad de propagación de un pulso en una cuerda es $c = \sqrt{T/\rho}$, donde T es la tensión y ρ es la densidad lineal de masa. Entonces, la velocidad en el lado izquierdo será $c_i = \sqrt{Mg/R}$ y en el lado derecho $c_d = \sqrt{Mg/2R}$.

Como la velocidad en el lado izquierdo es mayor, el pulso llegará antes al contacto entre ambas zonas de la cuerda. Calculamos el tiempo t^* que tarda en llegar el pulso izquierdo al centro:

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow t^* = \frac{d}{v} = \frac{L}{\sqrt{Mg/R}} = L\sqrt{R/(Mg)}$$

En ese tiempo, el pulso de la derecha ha avanzado:

$$d = c_d t^* = L\sqrt{Mg/2R}\sqrt{R/(Mg)} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

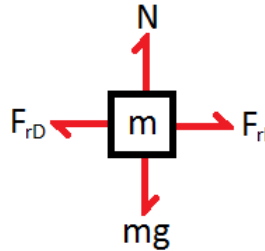
Como luego de ese instante, ambos pulsos avanzan en el mismo medio, tienen la misma velocidad y se encontrarán en el punto medio. Calculamos el punto medio (ahora considerando distancia desde el extremo izquierdo del sistema).

$$\frac{x_{pulso-izquierdo}(t^*) + x_{pulso-derecho}(t^*)}{2} = \frac{L + (2L - \frac{L}{\sqrt{2}})}{2} = L\frac{3 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

P13. Notamos que si la posición del extremo izquierdo de la caja es $x_I(t) = A\cos(\omega t)$, la posición del extremo derecho es $x_D(t) = A\cos(\omega t) + L$. Si la posición de la masa es x , la longitud de cada resorte en función del tiempo es:

$$\begin{aligned} L_{R-I} &= x - A\cos(\omega t) \\ L_{R-D} &= A\cos(\omega t) + L - x \end{aligned}$$

DCL:

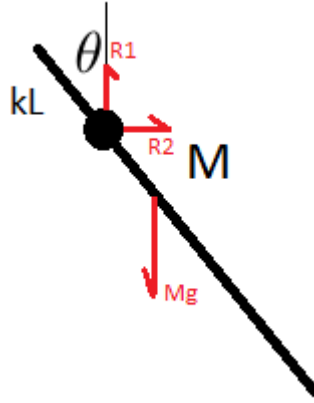


Ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{rI} - F_{rD} \\ m\ddot{x} &= -k(x - A\cos(\omega t)) - (-k(A\cos(\omega t) + L - x)) \\ m\ddot{x} &= -kx + Ak\cos(\omega t) + Ak\cos(\omega t) + kL - kx \\ m\ddot{x} &= -2kx + 2Ak\cos(\omega t) + kL \end{aligned}$$

Listo.

P14. Sabemos que el momento de inercia de la barra con respecto al centro de masas es $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$; por Steiner, el momento de inercia respecto al punto de apoyo será $I_O = I_{cm} + M(L/2 - kL)^2 = (\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - k + k^2)ML^2 = (\frac{1}{3} - k + k^2)ML^2$. DCL:



Utilizando torque eliminamos las reacciones en el punto de apoyo. Luego:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= -Mg(L(\frac{1}{2} - k))\sin(\theta) \\ (\frac{1}{3} - k + k^2)L\ddot{\theta} &= -g(\frac{1}{2} - k)\sin(\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{g(\frac{1}{2} - k)}{L(\frac{1}{3} - k + k^2)}\sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Para pequeñas oscilaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g(\frac{1}{2} - k)}{L(\frac{1}{3} - k + k^2)}\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta &= 0 \end{aligned}$$

P15. Es un péndulo físico con momento de inercia I , lo calculamos (asumimos que M es la masa de cada parte de la T):

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + (\frac{1}{12}ML^2 + ML^2) = \frac{17}{12}ML^2$$

El centro de masas del cuerpo estará a una distancia $\frac{3L}{4}$ del eje de giro (se calcula fácilmente como el centro de masas de los centros de masa de cada barra de la T). Consideremos un ángulo θ con respecto a la vertical y el nivel de $U_g = 0$ en el punto más bajo que puede alcanzar el centro de masas de la T . La energía potencial gravitatoria del cuerpo es:

$$U_g = (2M)gh_{CM} = 2Mg(\frac{3L}{4} - \frac{3L}{4}\cos(\theta)) = \frac{3}{2}MgL(1 - \cos(\theta))$$

Consideramos, además, la energía cinética de rotación:

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12}ML^2)\dot{\theta}^2 = \frac{17}{24}ML^2\dot{\theta}^2$$

Entonces, la energía mecánica será:

$$E = \frac{3}{2}MgL(1 - \cos(\theta)) + \frac{17}{24}ML^2\dot{\theta}^2$$

Como se conserva:

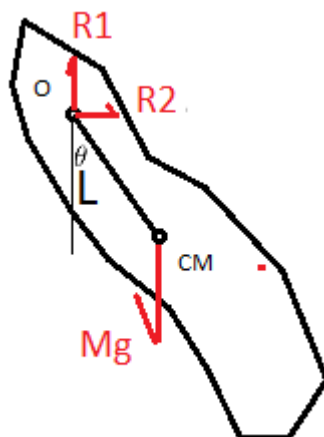
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = 0 &= \frac{3}{2}MgL\sin(\theta)\dot{\theta} + \frac{17}{24}ML^22\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ 0 &= \frac{3}{2}g\sin(\theta) + \frac{17}{12}L\ddot{\theta} \\ 0 &= \frac{18g}{17L}\sin(\theta) + \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Para pequeñas oscilaciones:

$$0 = \frac{18g}{17L}\theta + \ddot{\theta}$$

Luego $\omega_0^2 = \frac{18g}{17L}$.

P16. Dibujamos un objeto cualquiera. DCL:



Es claro que solo el peso ejerce torque. Luego $\tau = -MgL\sin(\theta)$. Como conocemos la inercia:

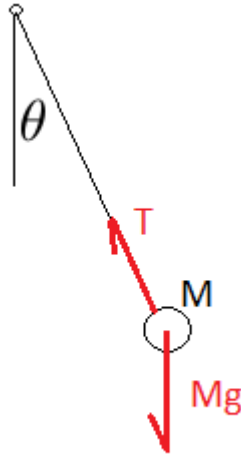
$$I\ddot{\theta} = -MgL\sin(\theta)$$

Para pequeñas oscilaciones:

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{MgL}{I}\theta$$

Entonces $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}}$.

Ahora consideramos el caso de un péndulo simple de masa M y largo $\frac{I}{ML}$. DCL:



El momento de inercia es $I = (Masa)(Largo)^2 = M \frac{I^2}{M^2 L^2} = \frac{I^2}{ML^2}$. Luego

$$I\ddot{\theta} = -Mg(Largo)\sin(\theta) = -Mg\frac{I}{ML}\sin(\theta) = -\frac{gI}{L}\sin(\theta)$$

$$\frac{I^2}{ML^2}\ddot{\theta} = -\frac{gI}{L}\sin(\theta)$$

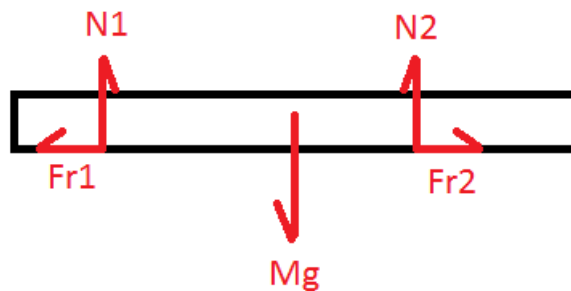
$$\frac{I}{ML}\ddot{\theta} = -g\sin(\theta)$$

Para pequeñas oscilaciones:

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{gML}{I}\theta$$

En efecto, ambas tienen igual ecuación de movimiento y, por lo tanto, período de pequeñas oscilaciones.

P17. Primero que todo, el roce es cinético, de modo que sí hay resbalamiento (no es relevante la velocidad angular con que giran las ruedas). La posición $x = 0$ es la posición del primer cilindro.



x_c denota la posición del centro de masas del cuerpo.

Calculemos el torque respecto a un eje que pasa por el punto de apoyo del primer cilindro. Es claro que las fuerzas de roce no ejercen torque y N_1 tampoco. La distancia entre el centro de masas del cuerpo (x_c) y la posición del primer cilindro ($x = 0$) es $x_c - 0 = x_c$; mientras que la distancia entre la posición de ambos cilindros es d . Suma de torque:

$$\tau = -Mgx_c + N_1d = 0 \rightarrow N_1 = \frac{Mg}{d}x_c$$

Sumamos fuerzas en el eje y:

$$N_1 + N_2 - Mg = 0 \rightarrow N_2 = Mg - N_1 = Mg - \frac{Mg}{d}x_c = Mg(1 - \frac{x_c}{d})$$

Ahora, conociendo las fuerzas normales y sabiendo que $F_r = \mu N$; sumamos fuerzas en el eje x (quitamos el subíndice c):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= \mu N_2 - \mu N_1 = \mu(Mg(1 - \frac{x}{d}) - \frac{Mg}{d}x) \\ M\ddot{x} &= \mu Mg - \mu \frac{2Mg}{d}x \\ 0 &= \ddot{x} - \mu g + \mu \frac{2g}{d}x \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variable $z = x - \frac{d}{2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{z} - \mu g + \mu \frac{2g}{d}(z + \frac{d}{2}) \\ 0 &= \ddot{z} + \mu \frac{2g}{d}z \end{aligned}$$

Lo que es MAS con $\omega_0^2 = \frac{2\mu g}{d}$.

P18. La ecuación de movimiento del problema es $0 = \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x}$. Las soluciones son del tipo $x(t) = x_{max}e^{-t/2\tau}\cos(\Omega t + \phi_0)$; con $\tau = \frac{m}{b}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Tenemos que tras un ciclo, la amplitud se reduce a la mitad (asumimos que el sistema parte en su amplitud máxima):

$$x(0) = x_{max}e^{-0/2\tau}\cos(\Omega_0 0 + \phi_0) = x_{max}\cos(\phi_0) = A \rightarrow \phi_0 = 0 \text{ y } x_{max} = A.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x(T) &= x_{max}e^{-T/2\tau}\cos(\Omega_0 T + \phi_0) = Ae^{-T/2\tau}\cos(\frac{2\pi}{T}T) = A/3 \rightarrow e^{-T/2\tau} = 1/3 \\ T &= -2\tau\ln(1/3) \rightarrow \tau = \frac{-T}{2\ln(1/3)} \end{aligned}$$

Sabemos que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $\Omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$, luego:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} - \frac{\ln^2(1/3)}{T^2} \rightarrow T^2 = m \frac{4\pi^2 + \ln^2(1/3)}{k} = 1.01$$

De modo que $T = 1.01s$.

P19.

(a) Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 8x + 12t + 12$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 8$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 18t + 12x + 18$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 18$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 18 = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 8$$
$$v^2 = 18/8 \rightarrow v = 3/2$$

Luego, satisface la ecuación de ondas.

(b) Podemos notar que la ecuación tiene $2x$ y $3t$ al cuadrado. Calculemos esos términos al cuadrado:

$$(2x + 3t)^2 = 4x^2 + 9t^2 + 12xt.$$

Faltan tres términos por tener, y dos de ellos son justamente la amplificación de $2x$ y $3t$:

$$6(2x + 3t) = 12x + 18t.$$

Y un término constante. Entonces:

$$y = 4x^2 + 9t^2 + 12xt + 12x + 18t + 30 = (2x + 3t)^2 + 6(2x + 3t) + 30 =$$
$$f(2x + 3t) = f(2(x + \frac{3}{2}t))$$

De modo que la onda va hacia la izquierda.

P20. Como es un movimiento oscilatorio amortiguado de la forma $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, las soluciones son del tipo $x(t) = x_{max}e^{-t/2\tau}\cos(\Omega t + \phi_0)$. Como el sistema comienza en su amplitud máxima:

$$x(0) = x_{max}e^{-0/2\tau}\cos(\Omega_0 t + \phi_0) = x_{max}\cos(\phi_0) = A \rightarrow \phi_0 = 0 \text{ y } x_{max} = A.$$

Por otro lado, en un tiempo $t = 5T$, se tiene:

$$x(5T) = x_{max}e^{-5T/2\tau}\cos(\Omega_0 \cdot 5T) = Ae^{-5T/2\tau}\cos(\frac{2\pi}{T} \cdot 5T)$$
$$x(5T) = Ae^{-5T/2\tau}\cos(10\pi) = Ae^{-5T/2\tau} = A/3$$
$$\frac{1}{3} = e^{-5T/2\tau}$$

Luego, y como $T = 0.2$ [s]:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{3}\right) &= -5T/2\tau \\ \tau &= \frac{-5T}{2\ln(\frac{1}{3})} = \frac{-1}{2\ln(\frac{1}{3})} [s] = 0.455 [s] \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \Omega^2 + \frac{1}{4\tau^2} \\ \omega_0^2 &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \frac{1}{4\tau^2} = \left(\frac{2\pi}{0.2[s]}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot (0.455[s])^2} = 988.17 [s^{-2}] \\ \omega_0 &= 31.43 [s^{-1}] \end{aligned}$$

La velocidad terminal se alcanza cuando la aceleración es nula (el roce viscoso se iguala con el peso), luego, imponemos:

$$\begin{aligned} -b\dot{y}_T - mg &= m\ddot{y} = 0 \\ \dot{y}_T &= -\frac{mg}{b} \end{aligned}$$

Como $\tau = m/b$, tenemos que $b = m/\tau$, luego:

$$\dot{y}_T = -\tau g = 0.455 [s] \cdot 9.8 [m/s^2] = 4.46 [m/s]$$

P21. La ecuación de movimiento (a partir de un DCL) es:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Y las soluciones son de la forma $x(t) = Ae^{-t/2\tau}\cos(\Omega t + \phi_0)$. Si notamos que se pide la constante elástica, basta con calcular ω_0 (m es conocido), y como $\omega_0^2 = \Omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}$, buscamos τ y Ω .

A partir del gráfico, se estima una amplitud $A = 1$ [cm] y período $T = 0.52$ [s]. Por otro lado, la velocidad inicial es nula:

$$\begin{aligned} x(0) &= Ae^{-0/2\tau}\cos(\Omega \cdot 0 + \phi_0) = A \\ \cos(\phi_0) &= 1 \rightarrow \phi_0 = 0 \end{aligned}$$

Para calcular τ , notamos que $x(T) = 0.59$ [cm], luego:

$$\begin{aligned} x(T) &= Ae^{-T/2\tau}\cos(\Omega T) = -Ae^{-T/2\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{T}T\right) = Ae^{-T/2\tau} \rightarrow \frac{x(T)}{A} = e^{-T/2\tau} \\ \ln\left(\frac{x(T)}{A}\right) &= \frac{-T}{2\tau} \rightarrow \tau = \frac{-T}{2\ln\left(\frac{x(T)}{A}\right)} = \frac{-0.52}{2\ln\left(\frac{0.59}{1.00}\right)} [s] = 0.49 [s] \end{aligned}$$

Además, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.52} [s^{-1}] = 12.08 [s^{-1}]$. Finalmente:

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \Omega^2 + \frac{1}{4\tau^2} = 12.08^2 [s^{-2}] + \frac{1}{4 \cdot 0.49^2} [s^{-2}] = 146.97 [s^{-2}] \\ k &= m \cdot \omega_0^2 = 0.54 \cdot 146.97 [kg \cdot s^{-2}] = 79.36 [kg \cdot s^{-2}]\end{aligned}$$