

Sistemas Newtonianos - Preparación Control 2

Profesor: Roberto Rondanelli

Auxiliares: Álvaro Aravena, Cristián Jáuregui, Felipe Toledo

November 11, 2013

1 Resumen teórico

1.1 Movimiento Circular Uniforme

Se caracteriza por tener un radio R constante, y se suele describir utilizando como parámetro el ángulo entre el vector posición y el eje $\hat{x}$. Luego:

$$\vec{r} = R\cos(\phi)\hat{x} + R\sin(\phi)\hat{y}$$

Como el movimiento es uniforme, la velocidad angular ($\vec{\omega}$) es constante:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \text{Constante}$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \rightarrow (x(t), y(t)) = (R\cos(\phi_0 + \omega t), R\sin(\phi_0 + \omega t))$$

Se define:

- (a) R : Amplitud.
- (b) $\phi(t)$: Fase.
- (c) ϕ_0 : Constante de Fase.
- (d) $T = \frac{2\pi}{\omega}$: Período.

1.2 Movimiento armónico simple (MAS)

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un oscilador armónico simple es:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Cada vez que la ecuación dinámica de un sistema sea de esta forma, estaremos en presencia de un oscilador armónico. Y la solución es de la forma:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \\
\dot{x}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \\
\ddot{x}(t) &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \theta_0) = -\omega_0^2 x(t)
\end{aligned}$$

Donde:

- (a) $|A|$: Amplitud.
- (b) θ_0 : Constante de Fase.
- (c) ω_0 : Frecuencia Angular.
- (d) $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$: Período.

1.3 Resorte Ideal

Dado un resorte de constante elástica k y largo natural x_0 , se tiene:

$$F_e = ma = m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

Es fácil notar que se trata de un oscilador armónico, donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que la energía potencial elástica de un resorte de constante elástica k elongada Δx viene dada por:

$$\text{Energía potencial elástica} = U_e = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

Luego, la energía mecánica viene dada por:

$$\text{Energía mecánica} = U_e + K = \frac{1}{2}kA^2$$

1.4 Péndulo Simple

Cuerpo puntual de masa m colgando de un hilo ideal inextensible de longitud R . La ecuación de movimiento que rige su dinámica es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

Donde θ representa el ángulo entre el hilo y la vertical. Para el caso en que el péndulo oscila con ángulos pequeños ($1 \text{ rad} \gg \theta$), podemos aproximar $\sin(\theta) \sim \theta$. Obteniéndose la ecuación de movimiento característica de MAS, donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

1.5 Péndulo Físico

Péndulo real que no puede ser aproximado por un péndulo simple ($I \neq mR^2$). Si la masa del péndulo es M , d es la posición del centro de masa y I es el momento de inercia. Se tiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \sin(\theta) = 0$$

Imponiendo la condición de pequeñas oscilaciones, estamos en presencia de MAS, con:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

Las fuerzas de roce viscoso pueden expresarse de la forma:

$$\vec{F} = -f(|\vec{v}|)\hat{v}$$

Esta forma de roce es disipativa ($f > 0$). Si bien es complicado determinar las características de f , se reconocen dos regimenes de velocidad:

Para movimientos lentos (priman fuerzas viscosas) $f(v) \rightarrow f_s(v) \propto v$

Para movimientos rápidos (priman fuerzas turbulentas) $f(v) \rightarrow f_r(v) \propto v^2$

1.6 El Frenado de una Esfera sin Gravedad

Considere una masa m rodeada de aire en ausencia de gravedad, con velocidad inicial v_0 y posición inicial $x_0 = 0$, sometida a una fuerza de roce viscoso $F_x = -bv_x$ (b : coeficiente de roce viscoso).

A partir de la ecuación de movimiento, podemos deducir que:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 e^{-t/\tau} \\ x_x(t) &= v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

Donde $\tau = m/b$.

1.7 Caída libre con gravedad

Considere una masa m en caída libre sometida a un roce viscoso actuando en la dirección vertical. Se tiene que $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. Si el objeto parte del reposo en $y = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) \\ V_T &= g\tau \end{aligned}$$

1.8 Oscilaciones Amortiguadas

Considere un sistema formado por un bloque de masa m unido a un resorte de constante elástica k . Como es sabido:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Además, considere la acción de una fuerza de roce viscoso $\vec{F} = -b\dot{x}$. De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos llegar a: $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La solución es de la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0)$$

Donde $\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$ y los parámetros A y ϕ_0 dependen de las condiciones iniciales.

1.9 Oscilaciones Amortiguadas Forzadas

Si se tiene un oscilador amortiguado por una fuerza de roce viscoso $\vec{F} = -b\dot{x}$ y una fuerza de forzaje $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, la ecuación de Newton resulta:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -kx - b\dot{x} + F_0 \sin(\omega t) \\ \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_0}{M} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

Con:

$$\tan \delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Cuando $b \rightarrow 0$, se tiene $\tau \rightarrow \infty$, por lo que $e^{-t/2\tau} \rightarrow 1$. Además, la amplitud de la parte estacionaria $B(\omega) \rightarrow F_0/(M(\omega_0^2 - \omega^2))$, por lo tanto presenta divergencia en $\omega = \omega_0$.

1.10 Solución de D'Alembert

En general, la ecuación de ondas tiene la forma:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Donde $u(x, t)$ es una variable que describe la deformación relevante en el medio. Son soluciones de la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - ct) \\ u(x, t) &= g(x + ct) \\ u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \end{aligned}$$

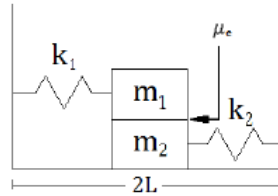
Donde f y g son funciones cualquiera.

Cabe destacar que c es la rapidez de propagación de la onda. Si la solución es del tipo $f(x - ct)$, la onda se propaga hacia valores positivos de x y si la solución es del tipo $g(x + ct)$, la onda se propaga hacia valores negativos de x .

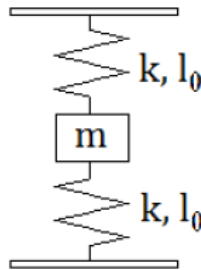
Para una cuerda con tensión T y densidad de masa lineal $\rho = M/L$, se tiene que $c = \sqrt{T/\rho}$; y para un arreglo de varillas con momentos de inercia I separadas por una distancia Δ y con una constante característica T , $c = \sqrt{T\Delta^2/I}$.

2 Problemas

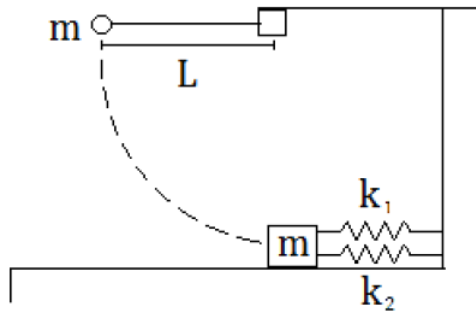
- P1. Se superponen dos masas en presencia de dos resortes de largo natural L , como se indica en la figura. Calcule la amplitud máxima de oscilación de modo que ambas masas no se separen, gracias a la presencia de una fuerza de roce estático (de constante μ_e).



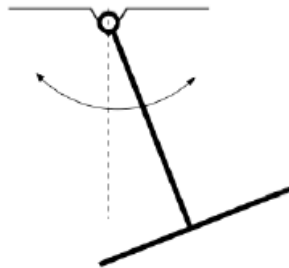
- P2. Considerando que inicialmente ($t = 0$), ambos resortes están en su largo natural y el bloque está en reposo. Determinar la ecuación de movimiento del bloque, la frecuencia angular, período de oscilaciones y amplitud.



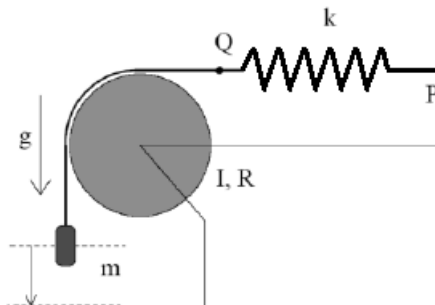
- P3. Se suelta la masa de un péndulo desde el reposo, de modo tal que desciende y choca elásticamente con un bloque de igual masa m . Encontrar la ecuación de movimiento del bloque tras la colisión, considerando que en $t = 0$ los resortes están en su largo natural l_0 . Ignore la presencia del péndulo después del choque.



- P4. Una T simétrica formada por dos barras homogéneas idénticas de longitud L , pende sin fricción del extremo libre de su barra central. En presencia de la gravedad terrestre g , la T oscila manteniéndose siempre en el plano de la figura. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

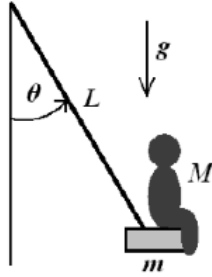


- P5. El sistema de la figura consiste en una carga de masa m que pende de una cuerda ideal que en el punto Q se une a un resorte. El resorte, dispuesto en forma horizontal, está sujeto a una pared fija en el punto P . La constante elástica del resorte es k y su extremo en Q nunca entra en contacto con la rueda. Esta última tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje central, y además puede girar sin fricción en torno a este. La cuerda en contacto con la rueda nunca resbala. Si la carga es soltada del reposo desde la altura mínima para la cual el resorte no sufre estiramiento, determine la frecuencia de las oscilaciones del sistema.



P6. Un niño de masa M está sentado en un columpio de masa m y largo L . El coeficiente de roce viscoso del columpio y el niño con el aire es b . Si el columpio se empuja con una fuerza $\vec{F} = F_0 \sin(\omega t) \hat{\theta}$, donde $\hat{\theta}$ es la dirección tangencial al movimiento del columpio (es decir, perpendicular siempre a la cuerda, y en dirección de θ creciente), se le pide detallar:

- (a) La ecuación de movimiento del columpio.
- (b) El periodo de pequeñas oscilaciones.
- (c) La frecuencia ω_r de resonancia del columpio.

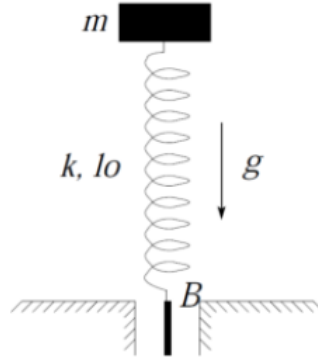


P7. Una masa de 2 [kg] oscila colgada de un resorte de constante $k = 400 \text{ [N/m]}$. La constante de amortiguamiento de la situación es $\nu = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud $F_0 = 10 \text{ [N]}$ y la frecuencia angular $\omega = 10 \text{ [rad/s]}$.

- (a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones en el régimen estacionario?
- (b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?
- (c) Encuentre la amplitud de las vibraciones en la resonancia.

P8. Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0 , bajo la acción de gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

- (a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa.
- (b) En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t) \hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa.
- (c) Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas.
- (d) Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?



- P9. Un pulso se mueve en la dirección x en un sistema de varillas acopladas por torsión τ , todas las varillas de igual largo $L = 0.2 \text{ m}$, masa $m = 0.3 \text{ kg}$, separación $\Delta = 0.01 \text{ m}$, y de diámetro muy pequeño. El pulso está descrito por:

$$\theta(x, t) = Ae^{-(ax+bt)^2}$$

Con $A = 0.2 \text{ rad}$, $a = 1 \text{ m}^{-1}$ y $b = 0.05 \text{ s}^{-1}$. Determine:

- La dirección de movimiento del pulso.
- La velocidad de propagación del pulso.
- La constante de torsión τ entre las varillas.

- P10. Se tienen dos pulsos descritos por las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2}$$

$$y_2 = -\frac{5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

- ¿En qué dirección viaja cada pulso?
- ¿En qué instante se cancelan los dos pulsos en todos los puntos?
- ¿En cuál punto siempre se cancelan las ondas?

P11.

- Demuestre que $y = x^2 + v^2 t^2$ es solución de la ecuación de ondas.
- Muestre que y puede escribirse de la forma $y = f(x - vt) + g(x + vt)$
- Lo mismo para $y = \sin(x)\cos(vt)$

- P12. Dos cuerdas de densidad lineal de masa R y $2R$ se unen entre sí, con la cuerda de mayor densidad en el lado derecho. Los extremos de la cuerda están unidos a sendas masas M . Se dispone de dos pivotes, separados una distancia $2L$, sobre los

cuales posa la cuerda en forma horizontal como se indica en la figura. En un cierto instante se generan dos pulsos idénticos y simétricos en cada uno de los extremos de la cuerda. Determine la distancia, medida desde el extremo izquierdo de la cuerda, donde se encuentran los puntos centrales de ambos pulsos.

