Sistemas Newtonianos - Clase Auxiliar Extra

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Cristián Jáuregui, Felipe Toledo

October 14, 2013

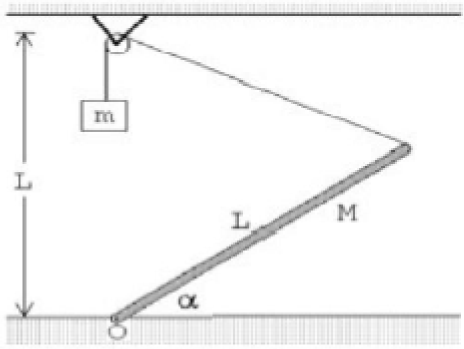
1 Problemas

P1. La datación radiométrica corresponde a un procedimiento empleado para determinar la edad absoluta de, por ejemplo, muestras de rocas. Para el caso en que un isótopo padre inestable se desintegra en un solo isótopo hijo estable, se utiliza la siguiente fórmula:

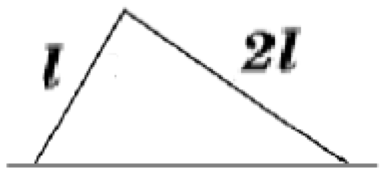
$$t = \frac{1}{\lambda} ln(1 + \frac{D}{P})$$

Donde t es la edad de la muestra, D es el número de átomos hijos presentes, P es el número de isótopos padres y λ es la constante de decaimiento del isótopo padre. Se presentan dos sistemas isotópicos: A con $\lambda_A = 3.4 \cdot 10^{-9} \pm 0.1 \cdot 10^{-9}$ y B con $\lambda_B = 1.3 \cdot 10^{-9} \pm 0.1 \cdot 10^{-9}$. Si sobre una muestra se hacen análisis químicos tales que $D_A/P_A = 32.22 \pm 0.01$ y $D_B/P_B = 2.9 \pm 0.1$. ¿Qué medición es más precisa? ¿Qué edad tiene la muestra?

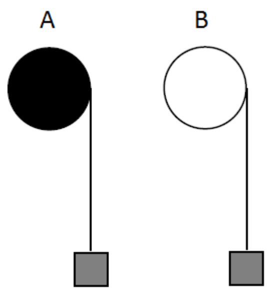
P2. Una barra de masa M y largo L puede girar libremente en torno a su punto de apoyo O en una superficie horizontal. La masa se mantiene en equilibrio estático con una masa m y una cuerda como indica la figura. Encuentre el ángulo α de equilibrio si $m/M = 0.5$.



P3. La figura adjunta muestra una L recta, formada por dos trozos de alambre uniforme. El más corto es de masa m y largo l, mientras que el más largo es de masa $2m$ y largo $2l$. Si el sistema se encuenta en equilibrio estático, encuentre la razón entre las reacciones normales en cada punto de contacto con el suelo.



P4. Se tienen dos poleas de igual radio R y masa M. La polea A tiene la masa distribuida uniformemente en su interior mientras que la polea B tiene la masa distribuida solo en el perímetro. Si se enrolla un hilo de la polea, del cual cuelta un cuerpo de masa m, determine el cuociente α_A/α_B entre las aceleraciones de ambas poleas.

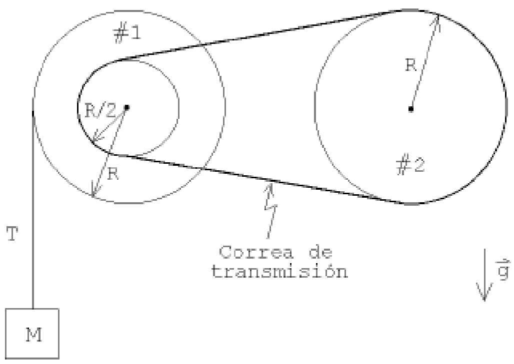


P5. Considere dos poleas fijas unidas por una correa (o cadena) de transmisión tal como se muestra en la figura adjunta. Una masa M colgada por una cuerda enrollada en la polea 1 pone en movimiento el sistema. Suponga que las poleas son discos de radio R y tienen una masa M. Note que una correo de transmisión solo puede transmitir una fuerza de tracción. Para el presente problema solo la parte superior de la correa transmite una fuerza entre las poleas.

(a) Encuentre la tensión T de la cuerda.

(b) Encuentre la aceleración angular de la polea 1.

(c) Usando la ley de conservación de la energía, encuentre la velocidad v que tiene la masa M después de haber bajado una distancia h (la masa M parte desde el reposo).

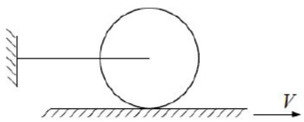


P6. Una rueda de masa M, radio R y momento de inercia I (respecto a su centro de masas) está en contacto con una superficie horizontal rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce estático μ_e y dinámico μ_d. El centro de la rueda está unido a una cuerda ideal cuyo otro extremo está unido a una pared fija a la misma altura del centro de la rueda.

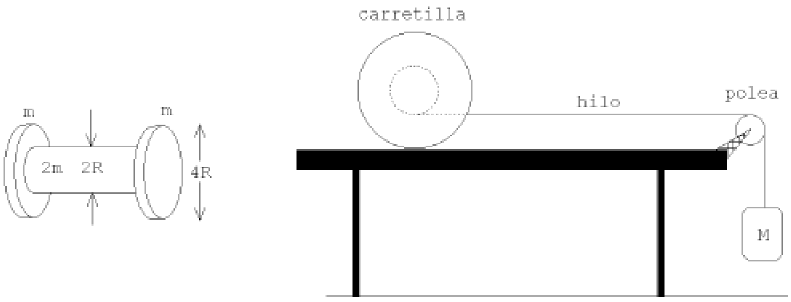
Inicialmente el sistema está en reposo y súbitamente la superficie horizontal empieza a moverse con velocidad constante V hacia la derecha.

(a) Encuentre y resuelva la ecuación de movimiento para la velocidad angular de la rueda.

(b) ¿Qué pasa cuando $\omega = \frac{V}{R}$? ¿Qué pasa luego de ese instante?



P7. Considere una carretilla de hilo, formada por dos discos y un cilindro con las dimensiones indicadas en la figura, que es tirada por el hilo que tiene enrollado debido a la presencia de una masa M. Encuentre la aceleración de la carretilla de hilo, si rueda sin resbalar.

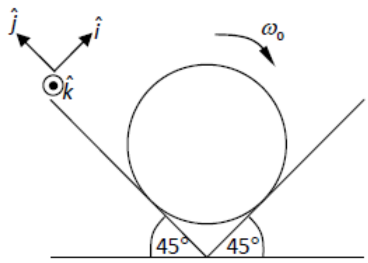


(a) (b)

P8. Una esfera de radio R, masa M y momento de inercia $I = \frac{2MR^2}{5}$ está apoyada sobre una cuña recta rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce dinámico μ_d. En el instante inicial, a la esfera se le da una velocidad angular ω_0 en la dirección que indica la figura.

(a) Determine la magnitud de todas las fuerzas externas que actúan sobre la esfera.

(b) Calcule cuánto tiempo tarda en detenerse la esfera debido al roce.



2 Resolución de Problemas

P1. Propagamos errores para un caso genérico, tomando: $\lambda = \langle\lambda\rangle \pm \triangle\lambda$ y $D/P = K = \langle K\rangle \pm \triangle K$. Calculemos $1+K$ (notando que 1 no tiene error asociado):

$$(1+K) = (1+\langle K\rangle) \pm \sqrt{(0)^2 + (\triangle K)^2} = (1+\langle K\rangle) \pm \triangle K$$

Luego, propagamos con una función:

$$ln(1+K) = ln(1+\langle K\rangle) \pm \tfrac{1}{1+\langle K\rangle}\triangle K$$

Finalmente:

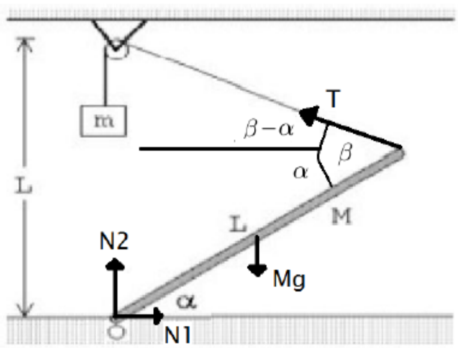
$$t = \tfrac{ln(1+K)}{\lambda} = \tfrac{ln(1+\langle K\rangle)}{\langle\lambda\rangle} \pm \tfrac{ln(1+\langle K\rangle)}{\langle\lambda\rangle}\sqrt{(\tfrac{\frac{\triangle K}{1+\langle K\rangle}}{ln(1+\langle K\rangle)})^2 + (\tfrac{\triangle\lambda}{\langle\lambda\rangle})^2}$$

Reemplazando:

$$t_A = \frac{ln(1+K)}{\lambda} = \frac{ln(1+32.22)}{3.4\cdot 10^{-9}} \pm \frac{ln(1+32.22)}{3.4\cdot 10^{-9}}\sqrt{(\frac{\frac{0.01}{1+32.22}}{ln(33.22)})^2 + (\frac{0.1\cdot 10^{-9}}{3.4\cdot 10^{-9}})^2} = 1030 \pm 30\ Ma$$
$$t_B = \frac{ln(1+K)}{\lambda} = \frac{ln(1+2.9)}{1.3\cdot 10^{-9}} \pm \frac{ln(1+2.9)}{1.3\cdot 10^{-9}}\sqrt{(\frac{\frac{0.1}{1+2.9}}{ln(1+2.9)})^2 + (\frac{0.1\cdot 10^{-9}}{1.3\cdot 10^{-9}})^2} = 1050 \pm 80\ Ma$$

Es más preciso el sistema isotópico A.

P2. Utilizaremos la segunda condición de equilibrio: $\sum \vec{\tau} = 0$. Dibujamos un DCL de la tabla, cabe señalar que se impone un ángulo desconocido β.



Como las fuerzas normales no ejercen torque, las omitiremos del análisis (en eso se fundamenta la utilización de torque en este ejercicio).

Torque por peso de la barra:

$$\vec{F} = -Mg\hat{j}$$
$$\vec{r} = (L/2)cos(\alpha)\hat{i} + (L/2)sin(\alpha)\hat{j}$$
$$\vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{F} = -Mg(L/2)cos(\alpha)\hat{k}$$

Torque por tensión de la cuerda:

$$\vec{F} = -Tcos(\beta-\alpha)\hat{i} + Tsin(\beta-\alpha)\hat{j}$$
$$\vec{r} = (L)cos(\alpha)\hat{i} + (L)sin(\alpha)\hat{j}$$
$$\vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{F} = (Lcos(\alpha)Tsin(\beta-\alpha) + Lsin(\alpha)Tcos(\beta-\alpha))\hat{k}$$

Como:

$$sin(\beta-\alpha) = sin(\beta)cos(\alpha) - sin(\alpha)cos(\beta)$$
$$cos(\beta-\alpha) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)$$

Se tiene:

$$\vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{F} = LTsin(\beta)\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_T = 0 = (LTsin(\beta) - Mg(L/2)cos(\alpha))\hat{k}$$
$$T = \frac{Mgcos(\alpha)}{2sin(\beta)}$$

Ahora, notando que la masa m también está en reposo, es fácil notar que: $T = mg$. Como $m/M = 0.5$, se tiene:

$$mg = \frac{Mgcos(\alpha)}{2sin(\beta)} \rightarrow sin(\beta) = cos(\alpha)$$

Se necesita conocer β para determinar α. Es fácil notar que el triángulo que forma la barra, cuerda y la vertical es isósceles y, por lo tanto, sus ángulos internos son: $(\pi/2 - \alpha)$, β y β. Como los ángulos internos suman π:

$$\alpha = 2\beta - \pi/2$$

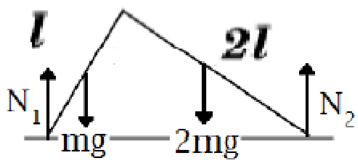
Entonces:

$$sin(\beta) = cos(2\beta - \pi/2) = cos(2\beta)cos(\pi/2) + sin(2\beta)sin(\pi/2) = sin(2\beta)$$

La única solución con sentido físico es: $\beta = \pi/3$, y en consecuencia:

$$\alpha = 2\pi/3 - \pi/2 = \pi/6$$

P3. DCL del problema:



Condiciones de equilibrio estático: suma de fuerzas nula.

$$F_y = 0 = N_1 + N_2 - mg - 2mg \rightarrow N_1 + N_2 = 3mg$$

El ángulo de la barra $2l$ con la horizontal es α y el ángulo de la barra l con la horizontal es β (desconocidos por el momento).

Ahora se impone la segunda condición de equilibrio estático: suma de torques nula. Para ello usaremos como eje de rotación el vértice de la figura: todas las fuerzas ejercen torque. (Escogiendo otro punto, se llega al mismo resultado).

Torque por N_1:

$$\vec{F} = N_1\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = -lcos(\beta)\hat{\imath} - lsin(\beta)\hat{\jmath}$$
$$\vec{\tau}_{N_1} = \vec{r} \times \vec{F} = -lN_1cos(\beta)\hat{k}$$

Torque por P_{mg}:

$$\vec{F} = -mg\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = -(l/2)cos(\beta)\hat{\imath} - (l/2)sin(\beta)\hat{\jmath}$$
$$\vec{\tau}_{mg} = \vec{r} \times \vec{F} = (l/2)mgcos(\beta)\hat{k}$$

Torque por N_2:

$$\vec{F} = N_2\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = 2lcos(\alpha)\hat{\imath} - 2lsin(\alpha)\hat{\jmath}$$
$$\vec{\tau}_{N_2} = \vec{r} \times \vec{F} = 2lN_2cos(\alpha)\hat{k}$$

Torque por P_{2mg}:

$$\vec{F} = -2mg\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = lcos(\alpha)\hat{\imath} - lsin(\alpha)\hat{\jmath}$$
$$\vec{\tau}_{2mg} = \vec{r} \times \vec{F} = -2lmgcos(\alpha)\hat{k}$$

Entonces:

$$\vec{\tau} = 0 = \vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{N_2} + \vec{\tau}_{2mg}$$
$$0 = -lN_1cos(\beta) + (l/2)mgcos(\beta) + 2lN_2cos(\alpha) - 2lmgcos(\alpha)$$
$$0 = -2N_1cos(\beta) + mgcos(\beta) + 4N_2cos(\alpha) - 4mgcos(\alpha)$$

Como $cos(\beta) = 1/\sqrt{5}$ y $cos(\alpha) = 2/\sqrt{5}$.

$$0 = -2N_1 + mg + 8N_2 - 8mg$$

Como $N_1 = 3mg - N_2$:

$$0 = -2(3mg - N_2) + mg + 8N_2 - 8mg$$
$$mg(13) = N_2(10) \to N_2 = mg\tfrac{13}{10}$$

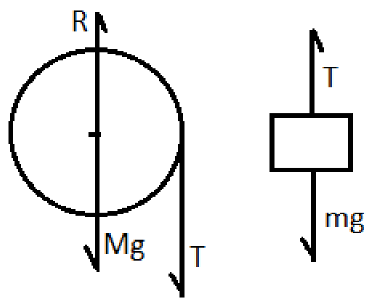
Ahora calculamos N_1:

$$N_1 = 3mg - N_2 = 3mg - mg\tfrac{13}{10} = \tfrac{17}{10}mg$$

Entonces:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{17}{13}$$

P4. DCL para un caso genérico, con una polea de momento de inercia I (como la polea no se traslada, es necesario que exista una fuerza R que se oponga al peso de la polea y a la tensión).



Ecuación para la masa (asumiendo aceleración positiva hacia arriba):

$$ma = T - mg \rightarrow a = \frac{T}{m} - g$$

Ecuación para la polea (asumiendo sentido de giro anti-horario como positivo):

$$I\alpha = -TR \rightarrow \alpha = -\frac{TR}{I}$$

Considerando que el hilo no resbala y que los sentidos positivos de ambas aceleraciones coinciden:

$$a = \alpha R$$
$$\frac{T}{m} - g = -\frac{TR^2}{I}$$
$$T = \frac{g}{\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I}} = \frac{gmI}{I + mR^2}$$

Luego:

$$\alpha = -\frac{TR}{I} = -\frac{gmR}{I + mR^2}$$

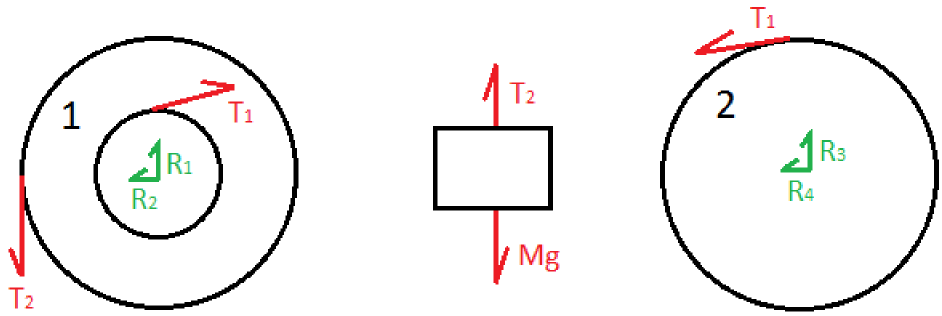
Ahora consideramos los dos casos ($I_A = \frac{MR^2}{2}$ e $I_B = MR^2$):

$$\alpha_A = -\frac{gmR}{\frac{MR^2}{2} + mR^2} = -\frac{2gm}{MR + 2mR}$$
$$\alpha_B = -\frac{gmR}{MR^2 + mR^2} = -\frac{gm}{MR + mR}$$

Finalmente:

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{2(MR + mR)}{MR + 2mR} = \frac{2M + 2m}{M + 2m}$$

P5. DCL (notando que solo la parte superior de la correa transmite fuerza).



Ecuaciones (notando que el momento de inercia de ambas poleas coincide):

$$\tau_1 = T_2 R - T_1 \frac{R}{2} = I\alpha_1 \ (1)$$
$$\tau_2 = T_1 R = I\alpha_2 \ (2)$$
$$Ma = T_2 - Mg \ (3)$$

Podemos relacionar la aceleración de la masa M y la polea 1: $\alpha_1 R = -a$. De la ecuación (3) en (1):

$$T_2 R - T_1 \frac{R}{2} = -\frac{I}{R}\left(\frac{T_2}{M} - g\right)$$
$$T_2\left(R + \frac{I}{RM}\right) = T_1 \frac{R}{2} + \frac{Ig}{R}$$

Como $I = MR^2/2$:

$$\frac{3T_2 R}{2} = \frac{T_1 R}{2} + \frac{MRg}{2}$$
$$3T_2 = T_1 + Mg \ (4)$$

Si llamamos a_C a la aceleración de un punto cualquiera de la correa, es fácil notar que:

$$a_C = \alpha_1 R/2$$
$$a_C = \alpha_2 R$$

De modo que $\alpha_1 = 2\alpha_2$. Imponiendo esta relación en (2) y reemplazando en (1):

$$T_2 R - T_1 \frac{R}{2} = I\left(\frac{2T_1 R}{I}\right)$$
$$2T_2 = 5T_1 \ (5)$$

De (5) en (4), calculamos la tensión de la correa (T_1):

$$3\left(\frac{5}{2}T_1\right) = T_1 + Mg \rightarrow T_1 = \frac{2Mg}{13} \ (6)$$

Calculamos α_1 con la Fórmula (1) (utilizamos $I = MR^2/2$, (5) y (6)):

$$\alpha_1 = \frac{T_2 R}{I} - \frac{T_1 R}{2I} = \frac{2T_2}{MR} - \frac{T_1}{MR} = \frac{5T_1}{MR} - \frac{T_1}{MR} = \frac{4}{MR}\frac{2Mg}{13} = \frac{8g}{13R}$$

Utilizamos conservación de la energía:

Inicialmente, la energía mecánica del sistema es nula (fijamos la posición de energía potencial nula en la ubicación inicial de la masa).

Cuando ha bajado una distancia h:

$$U_g(f) = -Mgh$$
$$K(f) = K_M(f) + K_{P1}(f) + K_{P2}(f) = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Relacionamos las velocidades (considerando que la velocidad de un punto cualquiera de la correa es v_C):

$$v/R = \omega_1$$
$$v_C = \omega_1 R/2$$
$$v_C = \omega_2 R$$
$$\omega_1 = 2\omega_2 \rightarrow v/(2R) = \omega_2$$

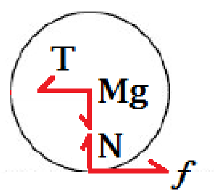
Entonces (empleando $I = MR^2/2$):

$$K(f) = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{4R^2}$$
$$K(f) = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{Mv^2}{4} + \frac{Mv^2}{16} = \frac{13Mv^2}{16}$$

Por conservación de la energía:

$$0 = -Mgh + \frac{13Mv^2}{16} \rightarrow v^2 = \frac{16gh}{13}$$

P6. Cuando la superficie empieza a moverse con velocidad V, la rueda aún está en reposo de modo que existe movimiento relativo entre la rueda y la superficie: existe resbalamiento. Un DCL:



Nos ocupamos del torque con respecto a un eje que pasa por el centro de la rueda, es fácil notar que sólo f es capaz de generar torque:

$$\tau = Rf$$

Es evidente que $N = Mg$, y como existe movimiento relativo entre los cuerpos, utilizamos coeficiente de roce dinámico, entonces:

$$\tau = R\mu_d Mg = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{R\mu_d Mg}{I}$$

Como la velocidad angular en $t = 0$ es nula, y la aceleración angular es constante:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0 + \frac{R\mu_d Mg}{I} \cdot t = \frac{R\mu_d Mg}{I} \cdot t$$

Cuando $\omega = V/R$, la velocidad relativa entre la rueda y la superficie es nula, de modo que se debe usar la constante de roce estático. Para este nuevo caso:

$$F_x = f - T = 0 \rightarrow f = T$$
$$N - Mg = 0 \rightarrow N = Mg$$

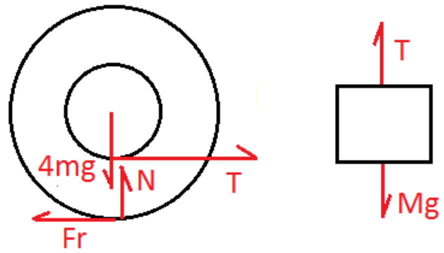
Se tiene que $\tau = Rf = I\alpha$, pero como $a_x = 0$, $\alpha = 0$, y en consecuencia:

$$\tau = 0 \rightarrow f = 0 \rightarrow T = 0$$

P7. Primero que todo, calculamos el momento de inercia del carrete respecto a su centro de masa (suma del momento de inercia de cada porción):

$$I = I_{disco-1} + I_{cilindro} + I_{disco-2} = \frac{m(2R)^2}{2} + \frac{2m(R)^2}{2} + \frac{m(2R)^2}{2} = 5mR^2$$

DCL (como la polea no tiene masa, igualamos la tensión):



Ecuaciones (llamamos a_C a la aceleración lineal del centro de masa del carrete):

$$Ma_M = T - Mg \ (1)$$
$$\tau = I\alpha = TR - F_r(2R) \rightarrow \alpha = \frac{RT - 2RF_r}{5mR^2} = \frac{T - 2F_r}{5mR} \ (2)$$
$$4ma_C = T - F_r \rightarrow a_C = \frac{T - F_r}{4m} \ (3)$$

Como rueda sin resbalar, es claro que $a_C = -\alpha(Radio) = -2R\alpha$. Imponemos esta relación sobre (2):

$$a_C = -\frac{2T-4F_r}{5m} \ (4)$$

Notando que la aceleración de la carretilla se descompone en el enrollamiento del carrete y en el avance de la masa M; tenemos (el signo negativo de a_M obedece a que se definió un eje positivo para la masa opuesto al eje positivo para la carretilla):

$$a_C = -a_M + a_E$$

Por otro lado, el enrollamiento se puede relacionar con la aceleración angular del carrete por R (Ojo, R, no $2R$): $a_E = -R\alpha$. Y como $a_C = -2R\alpha$, tenemos que $a_C = 2a_E$. Luego:

$$a_M = -\frac{1}{2}a_C \ (5)$$

Reemplazando en (1):

$$T = M(g - \frac{1}{2}a_C) \ (6)$$

De (3) y (4):

$$21F_r = 13T \ (7)$$

De (4) en (6):

$$T(10m - 2M) = 10mMg - 4MF_r \ (8)$$

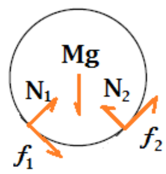
De (7) y (8):

$$F_r = \frac{13mMg}{21m+M}$$
$$T = \frac{21mMg}{21m+M}$$

Reemplazando en (3):

$$a_C = \frac{2Mg}{21m+M}$$

P8. DCL del problema:



$$F_x = f_2 + N_1 - Mgcos(\tfrac{\pi}{4}) = f_2 + N_1 - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$F_y = -f_1 + N_2 - Mgcos(\tfrac{\pi}{4}) = -f_1 + N_2 - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Como existe movimiento relativo entre los planos y la esfera: $f_1 = \mu_d N_1$ y $f_2 = \mu_d N_2$, luego:

$$F_x = \mu_d N_2 + N_1 - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ (1)$$
$$F_y = -\mu_d N_1 + N_2 - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ (2)$$

Multiplicando la primera ecuación por μ_d y sumándole la segunda ecuación:

$$N_2(1+\mu_d^2) - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mu_d) = 0 \rightarrow N_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1+\mu_d)}{1+\mu_d^2}$$

Ahora, multiplicando (2) por $-\mu_d$ y sumándole la ecuación (1):

$$N_1(1+\mu_d^2) - Mg\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mu_d) = 0 \rightarrow N_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1-\mu_d)}{1+\mu_d^2}$$

Y entonces:

$$f_1 = \mu_d \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1-\mu_d)}{1+\mu_d^2}$$
$$f_2 = \mu_d \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1+\mu_d)}{1+\mu_d^2}$$

Para calcular el tiempo que tarda en detenerse, es necesario calcular el torque (sólo ejercido por f_1 y f_2):

$$\tau = Rf_1 + Rf_2 = R\mu_d \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1-\mu_d)}{1+\mu_d^2} + R\mu_d \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}Mg(1+\mu_d)}{1+\mu_d^2} = R\mu_d \frac{\sqrt{2}Mg}{1+\mu_d^2}$$

Y como $\tau = I\alpha$, se tiene que:

$$\alpha = R\mu_d \frac{\sqrt{2}Mg}{I(1+\mu_d^2)}$$

Considerando que α es una constante y la velocidad angular inicial es $-\omega_0$ (sentido horario):

$$\omega = -\omega_0 + R\mu_d \frac{\sqrt{2}Mg}{I(1+\mu_d^2)} t$$

Luego, el tiempo en que se detiene (imponer $\omega = 0$):

$$t = \frac{\omega_0 I(1+\mu_d^2)}{\sqrt{2}R\mu_d M g}$$

Si imponemos $I = \frac{2MR^2}{5}$:

$$t = \frac{\omega_0 \sqrt{2}R(1+\mu_d^2)}{5g\mu_d}$$